…es Verfassers

…Jahre 1823 von dem…
…cul infinitésimal vergi…
…statt dieses Werkes zw…
…ke, das eine über die…
…ere über die Integral…
…s erscheint hiermit d…
…rechnung zum Gegenst…
…Methoden unterscheid…
…den, in den Werken…
…wandten. Meine Ha…
…ge, welche ich mir i…
…chen Analysis zum…
…aus der directen Be…
…rößen entspringenden…
…glaubte daher, die…
…n unendliche Reihen…
…wenn diese Reihen n…
…orsche Formel z. B. k…
…llgemein gültig angese…
…dliche Anzahl von Gli…
…est ergänzt wird. E…
…der berühmte Verf…

A. L. Cauchy's

Vorlesungen

über die

Differenzialrechnung,

mit

Fourier's Auflösungsmethode

der

bestimmten Gleichungen

verbunden.

Aus dem Französischen übersetzt

von

Dr. C. H. Schnuse.

Mit einer Steindrucktafel.

Braunschweig, 1836.

bei G. C. E. Meyer, sen.

in Herzoglicher Waisenhaus-Buchdruckerei.

Vorrede des Verfassers.

Da die Ausgabe vom Jahre 1823 von dem Résumé des Leçons sur le calcul infinitésimal vergriffen ist, so habe ich beschlossen, statt dieses Werkes zwei andere für sich bestehende Werke, das eine über die Differenzialrechnung, das andere über die Integralrechnung herauszugeben, und es erscheint hiermit das erste, welches die Differenzialrechnung zum Gegenstande hat. Die von mir befolgten Methoden unterscheiden sich in mehrfacher Hinsicht von den, in den Werken über denselben Gegenstand angewandten. Meine Hauptabsicht ging dahin, die Strenge, welche ich mir in meinem Lehrbuche der algebraischen Analysis zum Gesetz gemacht hatte, mit der aus der directen Betrachtung der unendlich kleinen Größen entspringenden Einfachheit zu vereinigen. Ich glaubte daher, die Entwickelungen der Functionen in unendliche Reihen jedesmal verwerfen zu müssen, wenn diese Reihen nicht convergent sind. Die Taylorsche Formel z. B. kann demnach nur so lange als allgemein gültig angesehen werden, als sie auf eine endliche Anzahl von Gliedern reducirt und durch einen Rest ergänzt wird. Es ist mir sehr wohl bekannt, daß der berühmte Verfasser der

analytischen Mechanik diese Formel, anfangs von jenem Reste abstrahirend, zur Grundlage seiner **Theorie der abgeleiteten Functionen** genommen hat. Aber ungeachtet des Respectes, welchen eine so große Auctorität gebietet, sind doch die meisten Geometer jetzt darin einverstanden, daß man durch Anwendung divergirender Reihen zu unrichtigen Resultaten geführt werden kann. Die Taylorsche Formel scheint sogar in gewissen Fällen für die Entwickelung einer Function eine convergirende Reihe zu geben, obgleich die Summe der Reihe von der gegebenen Function wesentlich verschieden ist (S. Ende der zehnten Vorlesung). Auch werden sich die Leser meines Werkes, wie ich hoffe, überzeugen, daß sich die Prinzipien der Differenzialrechnung und deren wichtigsten Anwendungen ohne Hülfe der Reihen leicht zur Darstellung bringen lassen.

Uebrigens habe ich bei der Abfassung dieses Werkes die Arbeiten anderer Mathematiker über denselben Gegenstand, besonders die Theorie der Functionen von Lagrange, die Differenzialrechnung von Euler und Lacroix, eine Abhandlung von Poinsot in der Correspondance sur l'École Polytechnique, endlich die Vorlesungen über Differenzialrechnung von Ampere und eine Abhandlung von demselben im dreizehnten Hefte des Journals der genannten Schule zu benutzen gesucht.

Vorwort des Uebersetzers.

Das vorliegende Werk von Cauchy ist bereits bei mehreren Gelegenheiten von ausgezeichneten Mathematikern als das wichtigste, dem gegenwartigen Zustande der Wissenschaft am meisten entsprechende Werk über Differenzialrechnung anerkannt, so daß es überflüssig wäre, über dessen Vorzüge hier weitläufig zu reden, und es mag bloß im Allgemeinen bemerkt werden, daß diese Vorzüge bei höchster analytischer Eleganz und Strenge überhaupt, besonders in einer scharfen Bestimmung und ausschließlichen Betrachtung stetiger Functionen, in einer auf den Begriff der Grenzen gegründeten, strengern Definition der unendlich kleinen Größen, in einer zweckmäßigen Verbindung der Theorie des unendlich Kleinen, der Grenzen, und der abgeleiteten Functionen, und endlich in den wichtigen Regeln über die Convergenz der Reihen bestehen.

Eine Uebersetzung eines solchen klassischen Werkes kann daher in mehreren Hinsichten von Nutzen sein, und bedarf wohl keiner besondern Rechtfertigung.

Ferner muß hier noch bemerkt werden, daß in der Uebersetzung an die Stelle einer Note von Cauchy über die Auflösung der Gleichungen die Fouriersche Auflösungsmethode der Gleichungen, da sie den Vorzug verdient, und sich an das früher Vorgetragene ebenfalls sehr gut anschließt, gesetzt ist. Die Auflösung der Gleichungen muß als eine der wichtigsten Anwendungen der Differenzialrechnung angesehen werden, und deswegen konnte es nicht unzweckmäßig erscheinen, das Wesentliche von Fouriers Analyse des équations in Form eines Anhanges beizufügen. Zuletzt ist noch ein von Sturm entdeckter höchst wichtiger Lehrsatz bewiesen, vermittelst dessen man direct bestimmen kann, wie viele reelle Wurzeln eine gegebene Gleichung zwischen gegebenen Grenzen hat, welcher auch in Fourier's Werke fehlte.

Inhaltsverzeichniß.

Differenzialrechnung.

Vorerinnerungen.

Neunzehnte Vorlesung.

Zwanzigste Vorlesung.

Ein und zwanzigste Vorlesung.

Zwei und zwanzigste Vorlesung.

Drei und zwanzigste Vorlesung.

Anhang. Auflösung der bestimmten Gleichungen.

Erster Abschnitt.

Zweiter Abschnitt.

Seite

Druckfehler und Verbesserungen.

Seite.	Zeile.	
2	11 von oben,	statt $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ lies $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}$
12	21 v. o.,	st. $\frac{0}{1}$ l. $\frac{1}{0}$
19	1 von unten,	st. $-A^i$ l. $-A^x$
20	7 v. o.	st. $\alpha-1$ l. $a-1$
21	8 v. o.	st. $(a-x)$ l. $d(a-x)$
—	13 v. o.	st. $-\cos.$ l. $\cos.$
27	14 v. o.	st. dx l. dv
28	11 v. o.	st. r l. v
—	7 v. u.	st. man l. wir
40	22 v. o.	st. f l. f und st. F l. F
41	14 v. u.	st. manche l. mache
45	19 v. o.	st. F l. F'
55	1 v. u.	st. f l. f'
56	5 v. o.	füge man vor dem Punkte hinzu: und selbst in dem Falle, wo $f'(x)$ discontinuirlich wird.
60	3 und 7 v. o.	st. $2\cos i$ l. $2\sin i$ und Zeile 4 st. 1 l. 0
62	7 v. v.	st. gesagt l. gesetzt
67	8 v. o.	st. x l. x_0
69	5 v. u.	fehlt $f(x)$
70	10 v. o	st. $\frac{x}{1.2}$ l. $\frac{x^2}{1.2}$ und Zeile 11 st. $f'(x)$ l. $f'(0)$
74	6 v. o.	st. -1 l. -2
76	16 v. o.	st. 0 l. x
—	22 v. o.	l. $]^{\mu-n}$
—	1 v. u.	st. $(a-a)$ l. $(x-a)$
77	5 v. o.	st. $(a-x)$ l. $(x-a)$
79	8 v. o.	st. $1\ \theta)^{n-1}$ l. $(1-\theta)^{n-1}$ und Z. 4 st. x^{-1} l. x^{n-1}
82	15 v. o.	st. $(1+x)^n$ l. $(1+\theta x)^n$ und Z. 22 st. $x\ldots$ l. $+\ldots$
84	6 v. u.	st. $+2$ l. $+1$
86	11 v. o.	st. $(+1)$ l. $(\mu+1)$
—	1 v. u.	st. $(1-a)^n$ l. $(x-a)^n$
88	4 v. u.	st. $(x-a)^{n-1}$ l. x^n
89	13 v. u.	st. gelegt l. zerlegt
91	16 v. u.	ist „die" zu streichen
92	10 und 11 v. o.	st. p^n l. p^2, st. q_n l. q_n^2
93	3 und 4 v. u.	st. n l. m
96	12 v. u.	st. n l. m
98	8 v. u.	st. 2 l. 3 und Z. 14 ist $\lim\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{n}}$ zu streichen
99	13 und 14	st. φ l. ψ
100	17 v. o.	st. φ l. ψ
101	11 v. o.	st. $(1+\theta)$ l. $(1+\theta x)$
103	1 v. o.	st. ψ l. ψ_n
106	8, 13, 35	st. a l. α
108	3 und 13 v. u.	st. $\sqrt{p^2+p^2}$ l. $\sqrt{p^2+q^2}$
111	10, 11, 12 v. o.	st. τ l. t

Seite.	Zeile.			
113	2	v.	u.	st. endliche l. unendliche
116	16	v.	u.	st. $e^x . e^x$ l. $e^x . e^y$ und Z. 17 st. n l. x
122	1	v.	u.	l. $\mathfrak{Q} = l(q+\sqrt{q^2+1})$
124	18	v.	o.	st. $\sqrt{p^2-1}$ l. $\sqrt{q^2+1}$
128	8	v.	u.	st. $p+q$ l. $1+q$
132	10	v.	o.	st. $(1+1)$ l. $(1+i)$
134	4	v.	o.	st. $==$ l. $=-$
—	11	v.	o.	l. $d(-y)=-dy$
139	13	v.	u.	st. x'' l. y'' und st. $y'''dx$ l. $y'''dx^3$
141	6	v.	o.	st. (n) l. $(n-1)$
—	2	v.	o.	st. (39) l. (9)
145	2	v.	o.	st. t l. ν
150	11	v.	u.	st. cos l. sin
—	1	v.	u.	st. R l. R_n
152	2	v.	o.	st. $(R-\omega)$ l. $(R_1-\omega)$
155	4	v.	u.	st. $\tau_0 r^n$ l. $\rho_0 r^n$
160	4	v.	u.	st. $+e^x$ l. $+x^2$
163	2	v.	o.	st. p_2 l. q_2
164	5	v.	u.	st. $=+$ l. $=\pm$
170	17	v.	u.	st. nehme r l. nehme ρ
172	9	v.	u.	st. R l. R_2
174	5	v.	o.	st. 0,04 l. 0,4
175	15	v.	u.	st. 0,3372 l. 1,3372
176	11	v.	o.	st. $f(x)$ l. Δx
177	14	v.	o.	vertausche man sin $\mathfrak{T}$ und sin T
179	14	v.	o.	st. 1,3 l. 0,3
183	14	v.	u.	st. u l. h
186	2	v.	u.	st. B_{l-1} l. C_{l-1}
187	14	v.	u.	st. k l. x
233	16	v.	o.	st. zweite l. erste
247	9	v.	u.	st. d^2 l. d^n
253	15 und 31	v.	o.	fehlt § 5 und § 6.
261	17	v.	u.	fehlt § 9.
363	9	v.	o.	st. b l. a

Differenzialrechnung.

Vorerinnerungen.

Von den veränderlichen Größen, ihren Grenzen und den unendlich kleinen Größen. Von den continuirlichen und discontinuirlichen, den entwickelten und verwickelten, einfachen und zusammengesetzten rc. Functionen. Von den convergirenden oder divergirenden Reihen.

Vor der Auseinandersetzung der Prinzipien der Differenzialrechnung ist es nöthig, einige vorläufige Begriffe festzustellen, welches daher der Gegenstand ist, mit dem wir uns zuerst beschäftigen wollen.

Wenn man eine Größe so betrachtet, daß sie successive verschiedene Werthe annehmen soll, so wird sie eine veränderliche genannt. Im Gegentheil heißt jede Größe constant (unveränderlich), wenn sie einen unveränderlichen und bestimmten Werth erhält. Wenn die einer veränderlichen Größe successive beigelegten Werthe sich einem festen Werthe unbestimmt nähern, so daß sie zuletzt beliebig wenig davon verschieden sein können; so wird dieser letztere die Grenze aller übrigen genannt. So ist z. B. die Kreisfläche die Grenze, gegen welche die Flächen der eingeschriebenen regelmäßigen Vielecke convergiren, während die Zahl ihrer Seiten immer größer und größer wird; und der vom Mittelpunkte der Hyperbel nach einem Punkte der Curve, welcher sich immer weiter von diesem Mittelpunkte entfernt, gezogene Radiusvector macht mit der Axe der x einen Winkel, welcher den durch die Asymptote und dieselbe Axe gebildeten Winkel zur Grenze hat, rc. Wir werden die Grenze, gegen welche eine gegebene veränderliche Größe convergirt, durch die vor diese veränderliche Größe gesetzte Abkürzung lim. andeuten.

Oft zeigen sich die Grenzen, gegen welche veränderliche Ausdrücke convergiren, unter einer unbestimmten Form, und dessen ungeachtet lassen sich die wahren Werthe dieser Grenzen durch be-

sondere Methoden fixiren. So z. B. zeigen sich die Grenzen, denen sich die zwei veränderlichen Ausdrücke:

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha},\ (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

unbestimmt nähern, während α gegen Null convergirt, unter den unbestimmten Formen $\frac{0}{0}$, $1^{\pm\infty}$; und dennoch haben diese beiden Grenzen bestimmte Werthe, welche sich auf folgende Weise berechnen lassen.

Für sehr kleine numerische Werthe von α hat man offenbar:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

Folglich wird das Verhältniß $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$, welches beständig zwischen den Größen $\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$ und $\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} = \cos\alpha$ liegt, wovon die erste der zweiten zur Grenze dient, selbst die Einheit zur Grenze haben.

Wir wollen nun die Grenze suchen, gegen welche der Ausdruck $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ convergirt, während sich α der Null unbestimmt nähert. Wird α positiv und von der Form $\frac{1}{m}$ angenommen, wo m eine ganze, positive, und einer unbestimmten Vergrößerung fähige Zahl bedeutet; so hat man:

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

$$= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots m}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{m}\right).$$

Da die Glieder im zweiten Theile dieser letzten Formel, welche die Größe m enthalten, sämmtlich positiv sind, und dem Werth und der Zahl nach mit dieser Größe zugleich wachsen; so ist klar, daß der Ausdruck $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ selbst mit der ganzen Zahl m wachs-

sen wird, indem er stets zwischen den beiden Summen:

$$1+\frac{1}{1}=2$$

und

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{2.2.2}+\ldots=1+1+1=3$$

liegt. Folglich nähert er sich, für zunehmende Werthe von m, unbestimmt einer gewissen, zwischen 2 und 3 liegenden Grenze. Diese Grenze ist eine Zahl, welche in dem Infinitesimalcalcul eine große Rolle spielt, und durch e bezeichnet zu werden pflegt Nimmt man $m=10000$, so findet man zum Näherungswerthe von e, wenn man sich der gemeinen logarithmischen Tafeln bedient:

$$\left(\frac{10001}{10000}\right)^{10000}=2,7183\ldots$$

Dieser Näherungswerth ist, wie wir später sehen werden, bis auf 0,0001 genau.

Wir wollen nun annehmen, α sei wieder positiv, aber nicht mehr von der Form $\frac{1}{m}$. In dieser Voraussetzung wollen wir durch m und $n=m+1$ die beiden ganzen Zahlen bezeichnen, welche zunächst kleiner und größer sind, als $\frac{1}{\alpha}$, so daß:

$$\frac{1}{\alpha}=m+\mu=n-\nu,$$

wo μ und ν Zahlen zwischen 0 und 1 sind. Der Ausdruck $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ wird offenbar zwischen:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\left\{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right\}^{1+\frac{\mu}{m}}$$

und

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}^{1+\frac{\nu}{n}}$$

liegen, und da diese beiden Ausdrücke $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ für ins Unendliche abnehmende Werthe von α, oder für beständig wachsende Werthe von m und n gegen die Grenze e convergiren, wäh-

rend sich $\left(1+\frac{1}{m}\right)$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ der Grenze 1 unbestimmt nähern; so folgt, daß jeder der Ausdrücke:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

und mithin auch der zwischen ihnen liegende Ausdruck $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ gegen die Grenze e convergiren wird.

Endlich wollen wir setzen, α werde eine negative Größe. Setzt man in dieser Hypothese

$$1+\alpha=\frac{1}{1+\beta},$$

wo β eine positive Größe ist, die selbst gegen Null convergirt; so findet man:

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=(1+\beta)^{\frac{1+\beta}{\beta}}=\left\{(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}\right\}^{1+\beta},$$

und indem man zu den Grenzen übergeht:

$$(1) \qquad \lim.(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e^{\lim.(1+\beta)}=e.$$

Die Logarithmen, welche aus dem Systeme genommen sind, dessen Basis e ist, heißen **nepersche** oder **hyperbolische**. Wir wollen sie durch den Buchstaben l bezeichnen, während wir den Buchstaben L gebrauchen wollen, um die aus irgend einem andern Systeme, dessen Basis A ist, genommenen Logarithmen anzudeuten. Dieses vorausgesetzt, so ist offenbar $le=1$

$$Le=\frac{Le}{LA}=\frac{le}{lA}=\frac{1}{lA},$$

und ferner folgt aus der Formel (1):

$$(3) \qquad \lim\frac{l(1+\alpha)}{\alpha}=1, \quad (4)\ \lim.\frac{L(1+\alpha)}{\alpha}, =Le.$$

Wenn die successiven, sehr klein angenommen, numerischen Werthe ein und derselben veränderlichen Größe dergestalt abnehmen, daß sie kleiner werden, als jede gegebene Zahl; so wird diese veränderliche Größe ein sogenanntes **unendlich Kleines** oder eine **unendlich kleine Größe**. Eine Veränderliche dieser Art hat Null zur Grenze, und in den vorhergehenden Rechnungen war α eine solche Größe.

Wenn die successiven Zahlenwerthe einer und derselben veränderlichen Größe immmer größer und größer werden, so daß sie größer werden, als jede gegebene Zahl; so sagt man, daß diese veränderliche Größe das positive Unendliche, welches durch das Zeichen ∞ angedeutet wird, zur Grenze hat, wenn von einer positiven Veränderlichen die Rede ist, und das durch $-\infty$ bezeichnete negative Unendliche, wenn die Veränderliche negativ ist. Eine solche war die vorhin gebrauchte veränderliche Zahl m.

Wenn das Verhältniß zweier unendlich kleinen Größen gegen eine gegebene Grenze convergirt, während jede von ihnen sich der Null nähert; so ist die erwähnte Grenze das sogenannte letzte Verhältniß dieser unendlich kleinen Größen. So z. B. ist die Einheit das letzte Verhältniß von $\sin \alpha$ und α, $L e$ das letzte Verhältniß von $L(1+\alpha)$ und α, rc..., wenn α unendlich klein ist.

Wenn veränderliche Größen so mit einander verbunden sind, daß, wenn der Werth einer von ihnen gegeben ist, sich die Werthe aller übrigen daraus ableiten lassen; so denkt man sich gewöhnlich diese verschiedenen Größen vermittelst dieser einen, welche alsdann die unabhängige Veränderliche genannt wird, ausgedrückt, und die übrigen, durch diese unabhängige Veränderliche ausgedrückten Größen werden Functionen derselben genannt.

Wenn veränderliche Größen dergestalt mit einander verbunden sind, daß man, wenn die Werthe einiger von ihnen gegeben sind, die aller übrigen daraus ableiten kann; so denkt man sich diese verschiedenen Größen durch mehrere von ihnen, welche alsdann unabhängige Veränderliche genannt werden, ausgedrückt, und die übrigen, mittelst dieser unabhängigen Veränderlichen ausgedrückten Größen heißen Functionen derselben Veränderlichen. Die verschiedenen Ausdrücke, welche die Algebra und Trigonometrie liefern, sind, wenn sie Veränderliche enthalten, die als unabhängig veränderlich betrachtet werden, eben so viele Functionen dieser Veränderlichen. So sind z. B.

$$L(x), \sin x, \text{etc....}$$

Functionen der Veränderlichen x,

$$x+y, x^y, xyz \text{ etc....}$$

Functionen der Veränderlichen x und y oder x, y und z, etc....

Wenn Functionen einer oder mehrerer Veränderlichen unmittelbar durch diese Veränderlichen ausgedrückt sind, wie in den vorigen Beispielen; so nennt man sie entwickelte Functionen. Werden aber bloß die Relationen zwischen den Functionen und den Veränderlichen angegeben, d. h. die Gleichungen, welchen diese Größen genügen müssen; so heißen die Functionen, da sie nicht unmittelbar durch die Veränderlichen ausgedrückt werden, so lange diese Gleichungen nicht algebraisch gelöst sind, verwickelte Functionen. Um sie zu entwickelten zu machen, braucht

man nur die Gleichungen aufzulösen, welche sie bestimmen, wofern dieses möglich ist. Z. B. wenn y eine durch die Gleichung:

$$L(y) = x$$

bestimmte, verwickelte Function von x ist, und die Basis des logarithmischen Systems, welches man betrachtet, A genannt wird; so ist diese Function, welche durch Auflösung der gegebenen Gleichung eine entwickelte wird:

$$y = A^x.$$

Wenn man eine entwickelte Function von einer Veränderlichen x, oder von mehrern Veränderlichen x, y, z... bezeichnen will, ohne die Natur (Form) dieser Function zu bestimmen; so gebraucht man eine der Bezeichnungen:

$$f(x),\ F(x),\ \varphi(x),\ \chi(x),\ \psi(x) \quad \text{etc....}$$

$$f(x, y, z...),\ F(x, y, z...),\ \varphi(x, y, z...) \ \text{etc...}$$

Es ist zweckmäßig, unter den Functionen einer einzigen Veränderlichen die sogenannten einfachen Functionen, welche als aus einer einzigen, mit der Veränderlichen vorgenommenen Operation entstehend gedacht werden, von den Functionen zu unterscheiden, die man als Resultate mehrerer Operationen betrachtet, und zusammengesetzte Functionen nennt.

Die einfachen Functionen, welche aus den Operationen der Algebra und Trigonometrie hervorgehen (siehe algebraische Analysis Cap. I.), können auf die folgenden reducirt werden:

$$a + x,\ a - x,\ ax,\ \frac{a}{x},\ x^a,\ A^x,\ L(x),$$

$$\sin x,\ \cos x,\ \text{arc.} \sin x,\ \text{arc.} \cos x,$$

wo A eine constante Zahl, $a = \pm A$ eine constante Größe, und L einen Logarithmus aus dem Systeme, dessen Basis A ist, anzeigt.

Noch muß bemerkt werden, daß wir, zufolge der in der algebraischen Analysis getroffenen Uebereinkunft, durch:

$$\text{arc.} \sin. x,\ \text{arc.} \cos. x,\ \text{arc.} \tang. x,\ \text{arc.} \cot. x,$$

$$\text{arc.} \sec. x,\ \text{arc.} \cosec. x$$

nicht einen beliebigen Bogen, wovon irgend eine trigonometrische Linie $= x$ ist, bezeichnen; sondern nur den unter ihnen, welcher den kleinsten numerischen Werth hat; oder wenn diese Bogen paarweise gleich und von entgegengesetztem Zeichen sind, denjenigen, welcher den kleinsten positiven Werth hat. Mithin werden arc. sin. x, arc. cot. x, arc. cosec x Bogen sein, welche zwischen den

Grenzen $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$ liegen, und arc. cos. x, arc. sec. x Bogen zwischen den Grenzen 0 und π.

Die Functionen von Functionen sind solche, welche aus mehrern successiven Operationen entstehen, wo die erste Operation mit der veränderlichen Größe, und jede der übrigen mit dem Resultate der vorhergehenden Operation vorgenommen wird. So sind z. B.

$$l\,\sin.\,x,\ l\,\cos.\,x.$$

Functionen von Functionen, wovon jede aus zwei successiven Operationen entsteht.

Die zusammengesetzten Functionen unterscheiden sich durch die Natur der Operationen, welche sie erzeugen. Es scheint, als ob man eigentlich alle Functionen, welche aus algebraischen Operationen entspringen, algebraische nennen müßte; allein man hat diese Benennung vorzugsweise nur für solche Functionen beibehalten, welche durch Anwendung der ersten algebraischen Operationen, d. h. durch Addition, Subtraction, Multiplication, Division und Erhebung zu bestimmten Potenzen gebildet werden. So bald eine Function einen veränderlichen Exponenten oder Logarithmen enthält, bekommt sie den Namen Exponential- oder logarithmische Function.

Die algebraischen Functionen werden in rationale und irrationale eingetheilt. Die rationalen Functionen sind die, in welchen die veränderliche Größe nur zu ganzen Potenzen erhoben vorkommt. Insbesondere nennt man jedes Polynom, welches nur ganze Potenzen der Veränderlichen enthält, z. B.

$$a + bx + cx^2 + etc....$$

eine ganze Function, und der Quotient zweier solcher Polynome heißt eine gebrochene Function oder ein rationaler Bruch. Der Grad einer ganzen Function von x ist der höchste Exponent von x, welcher darin vorkommt. Die ganze Function des ersten Grades, nämlich:

$$a + bx$$

heißt eine lineäre Function, weil man sich ihrer bei den Anwendungen auf Geometrie zur Darstellung der Ordinate einer geraden Linie bedient. Jede ganze Function ist daher, so wie auch jede gebrochene, rational, und jede andere Art algebraischer Functionen gehört zu den irrationalen.

Die Functionen, welche durch die Operationen der Trigonometrie erzeugt werden, heißen trigonometrische oder Kreisfunctionen.

Die verschiedenen Namen, welche wir so eben den zusammen-

Zweiter Abschnitt.

Ferner muß hier noch bemerkt werden, daß in der Uebersetzung an die Stelle einer Note von Cauchy über die Auflösung der Gleichungen die Fouriersche Auflösungsmethode der Gleichungen, da sie den Vorzug verdient, und sich an das früher Vorgetragene ebenfalls sehr gut anschließt, gesetzt ist. Die Auflösung der Gleichungen muß als eine der wichtigsten Anwendungen der Differenzialrechnung angesehen werden, und deswegen konnte es nicht unzweckmäßig erscheinen, das Wesentliche von Fouriers Analyse des équations in Form eines Anhanges beizufügen. Zuletzt ist noch ein von Sturm entdeckter höchst wichtiger Lehrsatz bewiesen, vermittelst dessen man direct bestimmen kann, wie viele reelle Wurzeln eine gegebene Gleichung zwischen gegebenen Grenzen hat, welcher auch in Fourier's Werke fehlte.

Neunzehnte Vorlesung.

Zwanzigste Vorlesung.

Ein und zwanzigste Vorlesung.

Zwei und zwanzigste Vorlesung.

Drei und zwanzigste Vorlesung.

Anhang. Auflösung der bestimmten Gleichungen.

Erster Abschnitt.

unendlich kleinen Größen, welche so geordnet sind, daß ihre Ordnungszahlen eine steigende Reihe bilden, positiv, oder negativ ist, für sehr kleine Werthe der Basis i, jenachdem das erste Glied dieser Reihe positiv, oder negativ ist.

Lehrsatz 3. In einem beliebigen Systeme ist das Product zweier unendlich kleinen Größen von den Ordnungen a und b, eine andere unendlich kleine Größe von der Ordnung a+b.

Beweis. Es seien wieder i die Basis des betrachteten Systems und I, J die gegebenen Größen; die erste von der Ordnung a, die zweite von der Ordnung b. Die beiden Verhältnisse:

$$\frac{I}{i^r},\ \frac{J}{i^s}$$

werden jedesmal Null zur Grenze haben, wenn man $r < a$, $s < b$ setzt, und das Unendliche, wenn man $r > a$, $s > b$ setzt; und dasselbe gilt von dem Producte:

$$\frac{I}{i^r}\cdot\frac{J}{i^s}=\frac{I.J}{i^{r+s}}.$$

Hieraus folgt offenbar, daß das Verhältniß:

$$\frac{I.J}{i^{r+s}}$$

für $r+s<a+b$ Null, und für $r+s>a+b$ das Unendliche zur Grenze hat. Also ist das Product I. J ein unendlich Kleines der Ordnung a+b.

Anmerk. Wenn einer der beiden Factoren eine endliche Größe würde, so würde das Product offenbar von derselben Ordnung sein, als der andere Factor.

Zusatz. In einem beliebigen Systeme ist das Product mehrerer unendlich kleinen Größen von den Ordnungen a, b, c... ein anderes unendlich Kleines von der Ordnung a+b+c+...

Lehrsatz 4. Wenn drei unendlich kleine Größen so beschaffen sind, daß die zweite von der Ordnung a ist, wenn man die erste zur Basis nimmt, und die dritte von der Ordnung b, wenn die zweite zur Basis genommen wird; so ist die dritte in dem Systeme, dessen Basis die erste ist, von der Ordnung ab.

Beweis. Es seien i, I und J die drei gegebenen Größen, so daß die beiden Verhältnisse:

$$\frac{I}{i^r},\ \frac{J}{I^s}$$

Null zur Grenze haben, wenn man zugleich $r<a$, $s<b$ setzt, und das Unendliche, wenn man zugleich $r>a$, $s>b$ setzt; so ist klar, daß das Product:

$$\left(\frac{I}{i^r}\right)^s \cdot \frac{J}{I^s} = \frac{J}{i^{rs}}$$

für $rs < ab$ Null, und für $rs > ab$ das Unendliche zur Grenze hat, und daß folglich J ein unendlich Kleines der Ordnung ab ist, wenn i zur Basis genommen wird.

Zusatz 1. Das Verhältniß zwischen den Ordnungen zweier unendlich kleinen Größen J und I bleibt immer dasselbe, was man auch für eine Basis annehmen mag, und dieses Verhältniß ist gleich der Zahl b, welche die Ordnung der ersten Größe ausdrückt, wenn man die zweite zur Basis nimmt. Folglich, wenn man, nachdem die Ordnungen mehrerer unendlich kleinen Größen bestimmt sind, für eine gewisse Basis diese Basis verändert; so werden die verschiedenen Ordnungszahlen alle zugleich in demselben Verhältnisse vergrößert oder verkleinert.

Zusatz 2. Wird angenommen, daß sich im Lehrsatz 4. die Größe J auf i reducire; so ist offenbar $ab=1$, $b=\frac{1}{a}$. Folglich ist, wenn in dem Systeme, dessen Basis i ist, die Größe I ein unendlich Kleines der Ordnung a ist, die Größe i in dem Systeme, welches die Größe I zur Basis hat, von der Ordnung $\frac{1}{a}$. Wenn z. B. I, als Function von i betrachtet, ein unendlich Kleines der ersten Ordnung ist, so kann man dasselbe von i, als Function von I betrachtet, sagen. Der zweite Zusatz mit dem ersten verbunden, führt zu dem folgenden.

Zusatz 3. Wenn zwei unendlich kleine Größen so beschaffen sind, daß, wenn die eine zur Basis genommen wird, die andere von der ersten Ordnung ist; so bleibt die Ordnungszahl irgend einer beliebigen Größe dieselbe in den beiden Systemen, welche jene beiden gegebenen Größen zu ihren Basen haben.

Erste Vorlesung.

Gegenstand der Differenzialrechnung. Abgeleitete Functionen und Differenziale der Functionen mit einer veränderlichen Größe.

Wenn x, y, z... veränderliche Größen sind, welche einer oder mehrern gegebenen Gleichungen Genüge leisten müssen; so nennt man Größen, deren Verhältnisse den letzten Verhältnissen der unendlich kleinen Incremente gleich sind, welche diese Veränderlichen gleichzeitig annehmen können, Differenziale von x, von y, von z etc... und bezeichnet sie vermittelst des Buchstabens d durch:

$$dx,\ dy,\ dz\ldots.$$

Der Gegenstand der Differenzialrechnung besteht darin: die Verhältnisse der Differenziale dx, dy, dz... zu bestimmen, wenn man die Relationen kennt, welche zwischen den Veränderlichen x, y, z... stattfinden; oder was dasselbe ist: die letzten Verhältnisse der unendlich kleinen Differenzen Δx, Δy, Δz... d. h. der unendlich kleinen und simultanen Incremente von x, y, z... zu bestimmen.

Um die Begriffe zu fixiren, nehmen wir an, daß man bloß zwei Veränderliche betrachte; nämlich eine unabhängige Veränderliche x und eine durch:

$$y = f(x)$$

bezeichnete Function von x.

Wenn die Function $f(x)$ zwischen zwei gegebenen Grenzen der Veränderlichen x continuirlich bleibt, und wenn man der Veränderlichen einen zwischen diesen Grenzen liegenden Werth beilegt; so wird ein der Veränderlichen ertheiltes unendlich kleines Increment auch eine unendlich kleine Veränderung der Function zur Folge haben. Also werden, wenn man $\Delta x = i$ setzt, die beiden Glieder des Differenzenverhältnisses:

$$(1)\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

unendlich kleine Größen sein. Aber während sich diese beiden Glieder unbestimmt und gleichzeitig der Grenze Null nähern, wird ihr Verhältniß selbst gegen eine andere Grenze, sie sei positiv oder negativ, convergiren können, welche das letzte Verhältniß der unendlich kleinen Differenzen $\Delta y, \Delta x$ sein wird. Diese Grenze, oder dieses letzte Verhältniß, hat, wenn es existirt *), für jeden particulären Werth von x einen bestimmten Werth; aber es variirt mit x. Setzt man z. B. $f(x)=x^m$, wo m eine ganze Zahl bezeichnet; so ist das Verhältniß zwischen den unendlich kleinen Differenzen:

$$\frac{(x+i)^m-x^m}{i}=mx^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}i+\ldots+i^{m-1},$$

und es wird die Größe mx^{m-1} zur Grenze haben, d. h. eine neue Function der Veränderlichen x. Dasselbe wird im Allgemeinen der Fall sein; nur wird die Form der neuen Function, welche die

---

*) Diese Grenze wird im Allgemeinen immer eine endliche und bestimmte Größe sein, und kann nur für einzelne Werthe von x Null oder unendlich werden; aber nicht fortwährend von einem Werthe $x=a$ bis zu einem andern $x=b$, wie klein die Differenz $b-a$ auch sein mag. Denn die Werthe a und b von x können immer so gewählt werden, daß f(a) und f(b) endliche und bestimmte Größen sind, und daß f(x) von $x=a$ bis $x=b$ beständig wächst oder beständig abnimmt. Es sei $\Delta x=\frac{b-a}{n}$, wo n eine positive ganze Zahl ist, die beliebig groß werden kann, so daß, wenn n unendlich groß wird, $\Delta x=i$ oder unendlich klein wird. Gibt man nun x successive die Werthe $a, a+\Delta x, a+2\Delta x, \ldots a+(n-1)\Delta x$, so erhält man für die correspondirenden Werthe des Verhältnisses $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$:

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x},\ \frac{f(a+2\Delta x)-f(a+\Delta x)}{\Delta x},\ \frac{f(a+3\Delta x)-f(a+2\Delta x)}{\Delta x},\ldots$$
$$\ldots\frac{f(a+n\Delta x)-f(a+(n-1)\Delta x)}{\Delta x} \qquad (a)$$

Diese Größen haben nach der Voraussetzung alle dasselbe Zeichen, und ihre Summe ist offenbar:

$$\frac{f(a+n\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=n.\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Sie können daher nicht alle zugleich größer oder kleiner sein als die endliche und bestimmte Größe $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, und wenn man n unendlich groß, also Δx unendlich klein, $=i$ setzt, so erhellet, daß die Werthe des Verhältnisses $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ innerhalb der Grenzen a und b nicht alle Null oder unendlich groß sein können.

Anmerk. d. Uebers.

Grenze des Verhältnisses $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ ist, von der Form der gegebenen $y=f(x)$ abhängig sein. Um diese Abhängigkeit auszudrücken, gibt man der neuen Function den Namen abgeleitete (derivirte) Function, und bezeichnet sie vermittelst eines Accentes durch:

$$y' \text{ oder } f'(x).$$

Hiernach sind die Differenziale dx, dy der unabhängigen Veränderlichen x und der Function $y=f(x)$ so gewählte Größen, daß ihr Verhältniß $\frac{dy}{dx}$ mit dem letzten Verhältnisse der unendlich kleinen Größen Δx, Δy, d. h. mit der Grenze $y'=f'(x)$ des Verhältnisses $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ übereinstimmt.

Diese Differenziale sind mit einander durch die Gleichung:

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx}=y' \text{ oder } \qquad (3) \qquad dy=y'dx$$

verbunden, welche man auch unter den Formen:

$$(4) \qquad \frac{df(x)}{dx}=f'(x), \qquad (5) \quad df(x)=f'(x)\,dx$$

ausdrücken kann.

Nach der Gleichung (2) oder (3) ist das Differenzial dy vollständig bestimmt, so bald man die Form der Function $y'=f'(x)$ und den Werth der Größe dx bestimmt hat. Was den Werth dieser letzten Größe anlangt, welche das Differenzial der unabhängig veränderlichen Größe ausdrückt; so bleibt dieselbe ganz unbestimmt und beliebig, und man kann sie einer constanten endlichen Größe h gleichsetzen, oder sie auch als eine unendlich kleine Größe betrachten.

Aus den Gleichungen (3) und (5) folgt, daß die abgeleitete Function $y'=f'(x)$ einer beliebigen Function $y=f(x)$ genau gleich $\frac{dy}{dx}$ ist, d. h. gleich dem Verhältnisse zwischen dem Differenzial der Function und dem der veränderlichen Größe, oder wenn man will, dem Coefficienten, durch welchen man das letzt genannte Differenzial multipliciren muß, um das erste zu erhalten. Aus diesem Grunde gibt man der derivirten Function zuweilen den Namen Differenzialcoefficient.

Eine Function differenziren heißt ihr Differenzial finden. Die Operation, durch welche man differenzirt, heißt Differenzirung.

Die derivirte Function $y' = \frac{dy}{dx}$ wird leicht gefunden, wenn man für y eine der einfachen Functionen nimmt:

$$a+x,\ a-x,\ ax,\ \frac{a}{x},\ x^a,\ A^x,\ L(x),$$

$$\sin. x,\ \cos. x,\ \text{arc. } \sin. x,\ \text{arc. } \cos. x,$$

wo A eine constante Zahl, $a = \mp A$ eine constante Größe und L den berechneten Logarithmus in dem Systeme, dessen Basis A ist, bezeichnet.

Man findet z. B.

für $y = a+x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(a+x+i)-(a+x)}{i} = 1$, $\frac{dy}{dx} = y' = 1$;

für $y = a-x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(a-(x+i))-(a-x)}{i} = -1$,

$$y' = \frac{dy}{dx} = -1,$$

für $y = ax$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x+i)-ax}{i} = a$, $y' = \frac{dy}{dx} = a$;

für $y = \frac{a}{x}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{a}{(x+i)} - \frac{a}{x}}{i} = -\frac{a}{x(x+i)}$, $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{a}{x^2}$;

für $y = \sin. x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin. \frac{1}{2} i}{\frac{1}{2} i} \cos. (x + \frac{1}{2} i)$,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \cos. x = \sin. \left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

für $y = \cos. x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin. \frac{1}{2} i}{\frac{1}{2} i} \sin. (x + \frac{1}{2} i)$,

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\sin. x = \cos. \left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Ferner, setzt man $A^i = 1 + I$ und berücksichtigt die Formel (4) der Vorerinnerungen, so findet man:

für $y = A^x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{A^{x+i} - A^x}{i} = \frac{A^i - 1}{i} A^x = \frac{I}{L(1+I)} A^x$,

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{A^x}{L(e)}=lA\,.\,A^x.$$

Endlich hat man, wenn man der Kürze wegen $\frac{i}{x}=\alpha$, und $(1+\alpha)^a-1=\beta$ setzt:

$$\text{für } y=L(x),\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{L(x+i)-L(x)}{i}=\frac{L\left((1+\frac{i}{x}\right)}{i}$$

$$=\frac{L(1+\alpha)}{\alpha}\cdot\frac{1}{x},\ y'=\frac{dy}{dx}=\frac{L(e)}{x};$$

$$\text{für } y=x^a,\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+i)^a-x^a}{i}=x^a\,\frac{\left(1+\frac{i}{x}\right)^a-1}{i}$$

$$=\frac{(1+\alpha)^a-1}{\alpha}x^{a-1}=\frac{\beta}{\alpha}x^{a-1}.$$

Es ist nun noch übrig, die Grenze des Verhältnisses der durch die Gleichung:

$$(1+\alpha)^a=1+\beta$$

mit einander verbundenen, unendlich kleinen Größen α und β zu finden.

Nun, aus dieser Gleichung folgt:

$$(6)\qquad a\,l(1+\alpha)=l(1+\beta).$$

Außerdem ist nach der Formel (3) der Vorerinnerungen:

$$\frac{l(1+\alpha)}{\alpha}=(1+\gamma),\ \frac{l(1+\beta)}{\beta}=(1+\delta),$$

wo γ, δ zwei unendlich kleine Größen bezeichnen. Folglich gibt die Gleichung (6):

$$a\alpha(1+\gamma)=\beta(1+\delta),$$

woraus folgt:

$$\frac{\beta}{\alpha}=a\,\frac{(1+\gamma)}{(1+\delta)},\ \lim.\frac{\beta}{\alpha}=a.$$

Daher ist:

$$\text{für } y=x^a,\ y'=\frac{dy}{dx}=ax^{a-1}.$$

Wenn man in den Functionen A^x und $L(x)$ die Zahl A in

die Zahl $e = 2{,}71828182\ldots\ldots$ und den Buchstaben L in den Buchstaben l, welcher die neperschen Logarithmen bezeichnet, verwandelte; so würde man finden:

$$\text{für } y = e^x, \ \frac{dy}{dx} = y' = e^x,$$

$$\text{für } y = l(x), \ y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Die verschiedenen vorhergehenden Formeln lassen sich in folgende Uebersicht zusammenstellen:

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} d(a+x) = dx, \ (a-x) = -dx, \ d(ax) = a dx, \ d\left(\frac{a}{x}\right) = -a\frac{dx}{x^2} \\ d(x^a) = ax^{a-1}dx, \\ dA^x = A^x l(A)\,dx, \ de^x = e^x dx, \\ dL(x) = L(e)\frac{dx}{x}, \ dl(x) = \frac{dx}{x} \\ d\sin. x = \cos. x dx = \sin.\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx, \\ d\cos. x = -\sin. x dx = -\cos.\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx. \end{array} \right.$$

Da sie bloß für reelle Werthe von x aufgestellt sind, welchen reelle Werthe der hinter dem Buchstaben d stehenden Functionen entsprechen; so muß x in denjenigen Formeln, welche sich auf die Functionen $L(x)$, $l(x)$ und selbst auf die Function x^a beziehen, wenn a ein Bruch von geradem Nenner, oder eine irrationale Zahl ist, positiv angenommen werden.

Es sei nun z eine zweite Function von x, welche mit der Function $y = f(x)$ durch die Gleichung:

$$z = F(y)$$

verbunden ist, so ist z oder $F[f(x)]$ eine sogenannte Function einer Function der Veränderlichen x; und bezeichnet man die unendlich kleinen und gleichzeitigen Incremente der drei Veränderlichen x, y, z durch Δx, Δy, Δz; so findet man:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \ \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta y}.$$

Geht man nun zu den Grenzen über, und substituirt den letzten Verhältnissen der unendlich kleinen Incremente Δx, Δy, Δz die Verhältnisse der Differenziale dx, dy, dz; so findet man einer Seits die Gleichung (4) oder (5) und anderer Seits die Formel:

(8) $\frac{dz}{dy} = F'(y)$, oder (9) $dz = F'(y)\,dy$,

oder was auf dasselbe hinausläuft:

(10) $$dF(y) = F'(y)\,dy.$$

Die Gleichung (10) ist der Form nach der Gleichung (5) ähnlich, und gibt das Mittel an die Hand, eine Function von y zu differenziren, selbst wenn y nicht die unabhängig veränderliche Größe ist; bloß mit dem Unterschiede, daß das Differenzial dx oder dy, welches im zweiten Theile der Gleichungen der derivirten Function $f'(x)$ oder $F'(y)$ zum Coefficienten dient, in der Gleichung (5) eine constante Größe und in der Gleichung (8) hingegen eine veränderliche ist, welche dem Producte aus der constanten Größe dx und der Function $f'(x)$ gleich ist.

Gibt man den Gleichungen $y = f(x)$ und $F(y)$ successive verschiedene Formen, so folgt aus der Gleichung (10):

$$d(a+y) = dy,\ d(-y) = -dy,\ d(ay) = a dy,\ d\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{dy}{y^2},$$

$$dA^y = A^y l(A)\,dy,\ de^y = e^y dy,\ dL(y) = L(e)\frac{dy}{y},\ dl(y) = \frac{dy}{y},$$

$$dl(y^2) = \frac{d(y^2)}{y^2} = \frac{2dy}{y},\ d.\tfrac{1}{2}l(y^2) = \frac{dy}{y},\ \text{etc.}\ldots$$

$$d(ax^m) = adx^m = max^{m-1}dx,\ d.A^{B^x} = A^{B^x} l(A)\,dB^x =$$
$$A^{B^x} B^x l(A) l(B)\,dx.$$

$$d.e^{e^x} = e^{e^x} d(e^x) = e^{e^x} e^x dx,\ de^{x^2} = e^{x^2} dx^2 = 2xe^{x^2} dx.$$

$$d.\sec.x = d\frac{1}{\cos.x} = -\frac{d\cos.x}{(\cos.x)^2} = \frac{\sin.x\,dx}{\cos.^2 x},$$

$$d.\operatorname{cosec}.x = d.\frac{1}{\sin.x} = -\frac{d\sin.x}{\sin.^2 x} = -\frac{\cos.x\,dx}{\sin.^2 x},$$

$$dl(\sin.x) = \frac{d\sin.x}{\sin.x} = \frac{\cos.x\,dx}{\sin.x} = \frac{dx}{\tang.x},$$

$$dl(\cos.x) = \frac{d\cos.x}{\cos.x.} = -\frac{\sin.x\,dx}{\cos.x} = -\frac{dx}{\cot.x};\ \text{etc.}$$

Die erste dieser Formeln zeigt, daß die Hinzufügung einer Constante zu einer Function weder das Differenzial, noch die abgeleitete Function ändert.

Vermittelst der Formel (10) kann man auch leicht die Differenziale der einfachen Functionen x^a, arc. sin. x, arc. cos. x bestimmen, wenn man die der Functionen l(x), sin. x, cos. x als bekannt voraussetzt; denn man findet:

$$\text{für } y = x^a, \; l(y) = a\,l(x), \; \frac{dy}{y} = \frac{a dx}{x}, \; \frac{dy}{dx} = a\frac{y}{x} = a x^{a-1};$$

$$\text{für } y = \text{arc. sin.} x, \; \text{sin.} y = x, \; \text{cos.} y\, dy = dx,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{cos.} y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{für } y = \text{arc. cos. } x, \; \text{cos. } y = x, \; -\text{sin. } y\, dy = dx,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\text{sin.} y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

man hat also:

$$(11) \qquad d\,\text{arc. sin.} x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \; d\,\text{arc. cos. } x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

In den Formeln (11) muß man die Veränderliche x als zwischen den Grenzen —1 und +1 liegend voraussetzen, damit die Ausdrücke arc. sin. x. arc. cos. x reelle Werthe behalten.

Dividirt man die beiden Theile der Gleichung (9) durch dx, so folgt daraus:

$$z' = y' F'(y) = f'(x) F'[f(x)].$$

Diese Formel dient zur Bestimmung der abgeleiteten Function einer Function von einer Function.

Zum Schlusse bemerken wir noch, daß sich die Differenziale zusammengesetzter Functionen zuweilen eben so leicht finden lassen, als die der einfachen. So findet man z. B.

$$\text{für } y = \text{tang.} x = \frac{\text{sin. } x}{\text{cos. } x}, \; \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{i}\left\{\frac{\text{sin.}(x+i)}{\text{cos.}(x+i)} - \frac{\text{sin.} x}{\text{cos.} x}\right\}$$

$$= \frac{\text{sin.} i}{i} \cdot \frac{1}{\text{cos.} x \,\text{cos.}(x+i)}, \; \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{cos.}^2 x},$$

$$\text{für } y = \text{cot.} x = \frac{\text{cos. } x}{\text{sin.} x}, \; \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{i}\left\{\frac{\text{cos.}(x+i)}{\text{sin.}(x+i)} - \frac{\text{cos.} x}{\text{sin.} x}\right\} =$$

$$= -\frac{\text{sin.} i}{i} \cdot \frac{1}{\text{sin.} x \,\text{sin.}(x+i)}, \; \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\text{sin.}^2 x},$$

und hieraus folgt:

$$\text{für } y = \text{arc. tang. } x, \; \text{tang.} y = x, \; \frac{dy}{\text{cos.}^2 y} = dx, \; \frac{dy}{dx} = \text{cos.}^2 y = \frac{1}{1+x^2},$$

für $y = \text{arc. cot. } y$, $\text{cot. } y = x$,

$$-\frac{dy}{\sin.^2 y} = dx,\ \frac{dy}{dx} = -\sin.^2 y = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Man hat also:

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} &d\,\text{tang. } x = \frac{dx}{\cos.^2 x},\ d\cot. = -\frac{dx}{\sin.^2 x}, \\ &d\,\text{arc. tang. } x = \frac{dx}{1+x^2},\ d\,\text{arc. cot. } x = -\frac{dx}{1+x^2}. \end{aligned} \right.$$

Zweite Vorlesung.

Das Differenzial der Summe mehrerer Functionen ist gleich der Summe ihrer Differenziale. Folgerungen aus diesem Prinzipe. Differenziale imaginärer Functionen.

In der vorhergehenden Vorlesung haben wir gezeigt, wie man die abgeleiteten Functionen und Differenziale der Functionen mit einer einzigen veränderlichen Größe bildet, und wollen jetzt die über diesen Gegenstand angestellten Untersuchungen weiter entwickeln.

Es sei wieder x die unabhängig veränderliche Größe und Δx ein unendlich kleines Increment derselben. Bezeichnet man durch s, u, v, w etc ... mehrere Functionen von x, und durch Δs, Δu Δv, Δw .... die gleichzeitigen Incremente, welche sie bekommen, wenn x um Δx wächst; so sind die Differenziale ds, du, dv, dw...., nach ihrer Definition, respective den Grenzen der Verhältnisse:

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} dx,\ \frac{\Delta u}{\Delta x} dx,\ \frac{\Delta v}{\Delta x} dx,\ \frac{\Delta w}{\Delta x} dx \text{ etc} \ldots$$

gleich.

Folglich werden diese Differenziale, wenn man der Kürze wegen $\frac{\Delta x}{dx} = \alpha$ setzt, auch den Grenzen der Verhältnisse:,

$$\frac{\Delta s}{\alpha},\ \frac{\Delta u}{\alpha},\ \frac{\Delta v}{\alpha},\ \frac{\Delta w}{\alpha} \text{ etc} \ldots$$

gleich sein.

Nun wollen wir zuvörderst annehmen, daß die Function s die Summe aller übrigen sei, so daß:

$$s = u + v + w + \ldots; \tag{1}$$

so findet man:

$$\Delta s = \Delta u + \Delta v + \Delta w + \ldots,$$

$$\frac{\Delta s}{\alpha} = \frac{\Delta u}{\alpha} + \frac{\Delta v}{\alpha} + \frac{\Delta w}{\alpha} + \ldots,$$

und wenn man zu den Grenzen übergeht:

$$ds = du + dv + dw + \ldots \tag{2}$$

Dividirt man die beiden Theile dieser letzten Gleichung durch dx, so verwandelt sie sich in:

$$(3) \qquad s' = u' + v' + w' + \ldots$$

Aus den Formeln (2) und (3) folgt, indem man sie mit der Gleichung (1) vergleicht, daß das Differenzial oder die derivirte Function der Summe mehrerer Functionen der Summe ihrer Differenziale oder ihrer abgeleiteten Functionen gleich ist. Aus diesem Prinzipe fließen, wie man so gleich sehen wird, zahlreiche Folgerungen.

Erstens. Wenn man durch m eine ganze Zahl, und durch a, b, c......p, q, r constante Größen bezeichnet; so ist:

$$(4) \quad d(u+v) = du + dv, \quad d(u-v) = du - dv, \quad d(au+bv) = adu + bdv;$$

$$(5) \quad d(au + bv + cw + \ldots) = adu + bdv + cdw + \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} d(ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots\ldots + px^2 + qx + r) = \\ {[max^{m-1} + (m-1)ax^{m-2} + (m-2)cx^{m-3} + \ldots . 2px + q]dx.} \end{array}\right\} (6)$$

Das Polynom $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + px^2 + qx + r$, dessen sämmtliche Glieder den ganzen Potenzen der Veränderlichen x proportional sind, wird eine ganze Function dieser Veränderlichen genannt. Bezeichnet man sie durch s, so hat man vermöge der Gleichung (6):

$$s' = max^{m-1} + (m-1)bx^{m-2} + (m-2)cx^{m-3} + \ldots + 2px + q.$$

Um also die derivirte Function einer ganzen Function von x zu erhalten, braucht man nur jedes Glied mit dem Exponenten der Veränderlichen zu multipliciren, und jeden Exponenten um eine Einheit zu vermindern. Es ist leicht einzusehen, daß dieser Satz auch in dem Falle statt findet, wo die Veränderliche imaginär wird.

Zweitens. Es sei nun:

$$(7) \qquad s = uvw \ldots .$$

Da, wenn alle Functionen u, v, w... positiv gesetzt werden,

$$(8) \qquad l(s) = l(u) + l(v) + l(w) + \ldots,$$

oder in allen möglichen Fällen:

$$(9) \qquad s^2 = u^2 v^2 w^2 \ldots$$

$$\tfrac{1}{2} l(s^2) = \tfrac{1}{2} l(u^2) + \tfrac{1}{2} l(v^2) + \tfrac{1}{2} l(w^2) + \ldots,$$

so gibt die Anwendung des ausgesprochenen Prinzipes auf die Formel (8) oder (9):

$$(10) \qquad \frac{ds}{s} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \ldots,$$

folglich:

$$d(uvw\ldots) = uvw\ldots\left\{\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \ldots\right\}$$

$$(11) \qquad = vw\ldots du + uw\ldots dv + uv\ldots dw + \ldots$$

Beispiele:

$$d(uv) = udv + vdu,\ d(uvw) = vwdu + uwdv + uvdw.$$

$$d.x\,l(x) = [1 + l(x)]\,dx,\ d(x^a e^{-x}) = x^a e^{-x}\left\{\frac{a}{x} - 1\right\},\ \text{etc.}$$

Drittens. Es sei ferner:

$$(12) \qquad s = \frac{u}{v}.$$

Differenzirt man $l(s)$ oder $\frac{1}{2}l(s^2)$, so findet man:

$$(13) \qquad \frac{ds}{s} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v},\ ds = \frac{u}{v}\left(\frac{du}{u} - \frac{dv}{v}\right)$$

und folglich:

$$(14) \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Dasselbe Resultat würde man finden, wenn man bemerkt, daß das Differenzial von $\frac{u}{v} = d.\left(u.\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v}\,du + ud\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{du}{v} - \frac{udx}{v^2}$.*)

Exempel:

$$d\tang x = d.\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x\, d\sin x - \sin x\, d\cos x}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

$$d\cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

$$d\left(\frac{a}{x}\right) = -\frac{adx}{x^2},\ d\left(\frac{e^{ax}}{x}\right) = \frac{e^{ax}}{x}\left(a - \frac{1}{x}\right)dx,\ d\frac{l(x)}{x} = \frac{1 - l(x)}{x^2}dx,$$

$$d\left(\frac{b}{a+x}\right) = -\frac{bdx}{(a+x)^2}.$$

*) Ueberhaupt ließen sich die Differenziale und abgeleiteten Functionen der verschiedenen bisher betrachteten Functionen noch auf mehrern andern Wegen finden, jenachdem diese oder jene Ordnung dabei befolgt wird, jenachdem eine Function selbst unmittelbar differenzirt, oder ihre Differenzirung auf die einer andern zurückgeführt wird, und nach dem, was man aus der algebraischen Analysis als bekannt voraussetzen will. Der von dem Verfasser gewählte Weg ist unstreitig der einfachste, eleganteste und rationellste von allen, welche eingeschlagen werden können. Denn es ist einleuchtend, daß die Differenzirung der *einfachen* Functionen, auf welche sich die der zusammengesetzten immer zurückführen lassen muß, die Basis der ganzen Differenzialrechnung bildet. Anmerk. d. Uebers.

Wenn sich die Functionen u, v auf ganze Functionen reduciren, so wird das Verhältniß $\frac{u}{v}$ ein sogenannter rationaler Bruch. Sein Differenzial läßt sich leicht vermittelst der Formeln (6) und (14) bestimmen.

Nachdem die Differenziale des Products $uvw\ldots$ und des Quotienten $\frac{u}{v}$ gebildet sind, lassen sich leicht die Differenziale mehrerer andern Ausdrücke, wie u^v, $u^{\frac{1}{v}}$, u^{v^w} etc... finden; denn man findet:

$$\text{für } s=u^v,\ l(s)=v\,l(u),\ \frac{ds}{s}=v\frac{du}{u}+l(u)dv,$$

$$ds=vu^{v-1}du+u^v\,l(u)\,dv;$$

$$\text{für } s=u^{\frac{1}{v}},\ l(s)=\frac{1}{v}l(u),\ \frac{ds}{s}=\frac{du}{uv}-l(u)\frac{dv}{v^2},$$

$$ds=u^{\frac{1}{v}-1}\frac{du}{v}-u^{\frac{1}{v}}l(u)\frac{dv}{v^2};$$

$$\text{für } s=u^{v^w},\ l(s)=v^w l(u),$$

$$\frac{ds}{s}=u^{v^w}v^w\left\{\frac{du}{u}+\frac{w}{v}l(u)\,dv+l(u).l(v)\,dw\right\}.$$

Beispiele:

$$d(x^x)=x^x[1+l(x)]\,dx,\ d\left(x^{\frac{1}{x}}\right)=\frac{1-l(x)}{x^2}x^{\frac{1}{x}}dx,\ d.x^{x^x}=\text{etc}....$$

Wir schließen diese Vorlesung mit der Bestimmung des Differenzials einer imaginären Function. So nennt man jeden Ausdruck, welcher auf die Form $u+v\sqrt{-1}$ zurückgeführt werden kann, indem u und v zwei reelle Functionen bezeichnen. Dieses vorausgesetzt, so wird man finden, daß, wenn man unter Grenze eines imaginären veränderlichen Ausdruckes das versteht, was dieser Ausdruck wird, wenn man in denselben für den reellen Theil und den Coefficienten von $\sqrt{-1}$ ihre respectiven Grenzen substituirt, und wenn man ferner die Definitionen, welche man für die Differenzen, Differenziale und abgeleiteten Functionen reeller Functionen gegeben haben, auf die imaginären Functionen erstreckt, die Gleichung:

$$s=u+v\sqrt{-1}$$

auf folgende führt:

$$\Delta s=\Delta u+\Delta v\sqrt{-1},\ \frac{\Delta s}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x},\ \sqrt{-1},$$

$$\frac{\Delta s}{\alpha} = \frac{\Delta u}{\alpha} + \frac{\Delta v}{\alpha}\sqrt{-1},$$

$$s' = u' + v'\sqrt{-1}, \quad ds = du + dv\sqrt{-1}.$$

Es ist also:

$$(15) \qquad d(u + v\sqrt{-1}) = du + dv\sqrt{-1},$$

Die Form dieser letzten Gleichung ist der der Gleichung (4) ähnlich. Setzt man:

$$s = \cos x + \sqrt{-1}.\sin x,$$

so findet sich:

$$ds = \left\{ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{-1}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right\} dx = s\sqrt{-1}\,dx.$$

Noch wollen wir bemerken, daß die Formeln (4), (5), (11) und (14) auch ihre Gültigkeit behalten, wenn die darin vorkommenden Constanten a, b, c...p, q, r und die Functionen u, v, w imaginär werden.

Dritte Vorlesung.

Differenziale und abgeleitete Functionen der verschiedenen Ordnungen für die Functionen von einer einzigen veränderlichen Größe. Vertauschung der unabhängig veränderlichen Größe.

Da die Functionen einer veränderlichen Größe x gewöhnlich derivirte haben, welches andere Functionen dieser Veränderlichen sind; so ist klar, daß man von einer gegebenen Function $y = f(x)$, im Allgemeinen eine Menge anderer, neuer Functionen wird ableiten können, wovon jede die derivirte der vorhergehenden ist. Diese neuen Functionen sind dann die sogenannten abgeleiteten Functionen der verschiedenen Ordnungen von y oder f(x), und man bezeichnet sie durch:

$$y', y'', y''', y^{IV}, y^{V}, \ldots y^{(n)},$$

oder durch:

$$f'(x), f''(x), f'''(x), f^{IV}(x), f^{V}(x), \ldots f^{(n)}(x).$$

Hiernach ist y' oder $f'(x)$ die abgeleitete Function der ersten Ordnung von der gegebenen Function $y = f(x)$; y'' oder $f''(x)$ ist die abgeleitete Function der zweiten Ordnung von y, und zugleich die abgeleitete Function der ersten Ordnung von y', etc... Endlich ist $y^{(n)}$ oder $f^{(n)}(x)$ (wo n irgend eine ganze Zahl bezeichnet) die abgeleitete Function der n^{ten} Ordnung von y, und zu gleicher Zeit die der ersten Ordnung von $y^{(n-1)}$.

Es sei nun $dx = h$ das Differenzial der als unabhängig betrachteten Veränderlichen x, so ist nach dem eben Gesagten:

$$(1) \qquad y' = \frac{dy}{dx},\ y'' = \frac{dy'}{dx},\ y''' = \frac{dy''}{dx}, \ldots y^{(n)} = \frac{dy^{(n-1)}}{dx},$$

oder was dasselbe ist:

$$(2) \qquad dy = y'h,\ dy' = y''h,\ dy'' = y'''.h, \ldots dy^{(n)} = y^{(n+1)}.h.$$

Da ferner das Differenzial einer Function der Veränderlichen x wieder eine Function dieser Veränderlichen ist, so hindert nichts, y mehrere Male nach einander zu differenziren.

Auf diese Weise erhält man die Differenziale der verschiedenen Ordnungen von der Function y, nämlich:

$$dy = y'.h = y'dx,\ ddy = hdy' = y''h^2 = y''dx^2,$$
$$dddy = h^2 dy'' = y'''h^3 = y'''dx^3,\ \text{etc...}$$

Der Kürze wegen schreibt man bloß d^2y statt ddy, d^3y statt dddy, etc; so daß das Differenzial der ersten Ordnung durch dy, das der zweiten durch d^2y, das der dritten durch d^3y, etc... und allgemein das von der Ordnung n durch d^ny ausgedrückt wird. Diesem gemäß hat man offenbar:

$$(3)\ dy = y'dx,\ d^2y = y''dx^2,\ d^3y = y'''dx^3 \ldots\ldots d^ny = y^{(n)}dx^n,$$

und folglich:

$$(4)\quad y' = \frac{dy}{dx},\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2},\ y''' = \frac{d^3y}{dx^3} \ldots\ y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Aus der letzten der Formeln (3) folgt, daß die abgeleitete Function der Ordnung n, nämlich $y^{(n)}$ genau der Coefficient ist, durch welchen man die n^{te} Potenz der Constante $h = dx$ multipliciren muß, um das Differenzial der n^{ten} Ordnung zu erhalten. Dieses ist die Ursache, weswegen $y^{(n)}$ zuweilen der Differenzialcoefficient der n^{ten} Ordnung genannt wird.

Die Methoden, durch welche man die Differenziale und abgeleiteten Functionen der ersten Ordnung für Functionen mit einer Veränderlichen bestimmt, dienen ebenfalls zur Berechnung ihrer Differenziale und abgeleiteten Functionen der höhern Ordnungen. Rechnungen dieser Art lassen sich, wie sogleich an Beispielen gezeigt werden soll, sehr leicht verrichten.

Es sei zuvörderst $y = \sin x$. Da, wenn a eine constante Größe ist, allgemein:

$$d\sin(x+a) = \cos(x+a)\,d(x+a) = \sin(x+a+\tfrac{1}{2}\pi)\,dx, \ldots.$$

ist, so folgt:

$$d\sin x = \sin(x+\tfrac{1}{2}\pi)dx,\ d\sin(x+\tfrac{1}{2}\pi)dx = \sin(x+\pi)\,dx^2,$$
$$d\sin(x+\pi) = \sin(x+\tfrac{3}{2}\pi)\,dx^3, \ldots.$$

Folglich hat man:

$$\text{für } y = \sin x,\ y' = \sin(x+\tfrac{1}{2}\pi),\ y'' = \sin(x+\pi),$$
$$y''' = \sin(x+\tfrac{3}{2}\pi) \ldots\ldots y^{(n)} = \sin(x+\tfrac{n}{2}\pi) \ldots.$$

Verfährt man auf dieselbe Weise, so wird man finden:

$$\text{für } y = \cos x,\ y' = \cos(x+\tfrac{1}{2}\pi),\ y'' = \cos(x+\pi),$$
$$y''' = \cos(x+\tfrac{3}{2}\pi), \ldots\ldots y^{(n)} = \cos(x+\tfrac{n}{2}\pi);$$

$$\text{für } y = A^x,\ y' = A^x l(A),\ y'' = A^x (lA)^2,$$
$$y''' = A^x (lA)^3 \ldots\ldots y^{(n)} = A^x (lA)^n;$$

$$\text{für } y = x^a,\ y' = ax^{a-1},\ y'' = a(a-1)x^{a-2},$$
$$y''' = a(a-1)(a-2)x^{a-3} \ldots\ldots y^{(n)} = a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)x^{a-n}.$$

Es ist zu bemerken, daß jeder der Ausdrücke $\sin(x + \frac{1}{2}n\pi)$, $\cos(x + \frac{1}{2}n\pi)$ vier verschiedene Werthe gestattet, welche periodisch und immer in derselben Ordnung wiederkehren. Von diesen vier Werthen wird der erste, zweite, dritte oder vierte erhalten, jenachdem die Zahl n, durch 4 dividirt, 0, 1, 2 oder 3 zum Reste gibt, und sind respective $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$ für den Ausdruck $\sin(x + \frac{1}{2}n\pi)$ und $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$ für den Ausdruck $\cos(x + \frac{1}{2}n\pi)$. Ferner, wenn man bei den Functionen A^x, x^a für den Buchstaben A die Zahl e, d. h. die Basis des neperschen Logarithmensystems, und für die Größe a die ganze Zahl n setzt; so wird man finden, daß die successiven derivirten Functionen von e^x alle $= e^x$ sind, während sich die abgeleitete Function der n^{ten} Ordnung von x^n auf die constante Größe 1. 2. 3... n reducirt, und die folgenden auf Null.

Setzt man für die abgeleiteten Functionen die Differenziale, so ergibt sich aus den eben angeführten Formeln:

$$d^n \sin x = \sin(x + \tfrac{1}{2}n\pi)\, dx^n,\ d^n \cos x = \cos(x + \tfrac{1}{2}n\pi)\, dx^n.$$

$$d^n A^x = A^x (lA)^n dx^n,\ d^n . e^x = e^x dx^n,$$
$$d^n (x^a) = a(a-1)\ldots(a-n+1)x^{a-n} dx^n$$
$$d^n (x^n) = 1.2.3\ldots n.dx^n,\ d^n l(x) = dx . d^{n-1}(x^{-1})$$
$$= (-1)^{n-1} . \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{x^n} dx^n;\ \text{etc}\ldots$$

Betrachten wir noch die beiden Functionen $f(x+a)$ und $f(ax)$. Man findet:

$$\text{für } y = f(x+a),\ y' = f'(x+a),\ y'' = f''(x+a), \ldots.$$
$$y^{(n)} = f^{(n)}(x+a),\ d^n y = f^{(n)}(x+a)\, dx^n.$$

$$\text{für } y = f(ax),\ y' = a f'(ax),\ y'' = a^2 f''(ax), \ldots$$
$$y^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax),\ d^n y = a^n f^{(n)}(ax)\, dx^n.$$

Beispiele:

$$d^n (x+a)^n = 1.2.3\ldots n dx^n,\ d^n . e^{ax} = a^n e^{ax} dx^n,$$
$$d^n \sin(ax) = \text{etc}\ldots$$

Es seien nun $y = f(x)$ und z zwei Functionen von x, welche durch die Gleichung:

$$z = F(y) \tag{5}$$

mit einander verbunden sind. Differenzirt man diese Gleichung mehrere Male nach einander, so findet man:

$$\left.\begin{array}{l} dz = F'(y)\,dy,\ d^2 z = F''(y)\,dy^2 + F'(y)\,d^2 y \\ \quad d^3 z = F'''(y)\,dy^3 + 3F''(y)\,dy\,d^2 y + F'(y)\,d^3 y,\ \text{etc.} \end{array}\right\}\ (6)$$

Beispiele:

$$d^n(a+y) = d^n y,\ d^n(-y) = -d^n y,\ d^n ay = a\,d^n y;$$

$$d^n(ay^n) = 1.2.3\ldots n.\,a\,dy^n,\ de^y = e^y\,dy,\ d^2 e^y = e^y(dy^2 + d^2 y),$$

$$d^3 e^y = e^y(dy^3 + 3\,dy\,d^2 y + d^3 y),\ \text{etc}\ldots$$

Wenn die veränderliche x aufhörte, unabhängig zu sein, so würde die Gleichung:

$$(7) \qquad y = f(x)$$

durch mehrmaliges Differenziren zu neuen Formeln führen, welche den Gleichungen (6) völlig ähnlich sind, nämlich:

$$(8)\ \left\{\begin{array}{l} dy = f'(x)\,dx,\ d^2 y = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2 x, \\ \quad d^3 y = f'''(x)\,dx^3 + 3f''(x)\,dx\,d^2 x + f'(x)\,d^3 x;\ \text{etc}\ldots \end{array}\right.$$

Hieraus folgt:

$$(9)\ \left\{\begin{array}{l} f'(x) = \dfrac{dy}{dx}, \\ f''(x) = \dfrac{dx\,d^2 y - dy\,d^2 x}{dx^3} = \dfrac{1}{dx}\,d\left(\dfrac{dy}{dx}\right), \\ f'''(x) = \dfrac{dx\,(dx\,d^3 y - dy\,d^3 x) - 3d^2 x\,(dx\,d^2 y - dy\,d^2 x)}{dx^5} \\ \quad = \dfrac{1}{dx}.\,d\left(\dfrac{dx\,d^2 y - dy\,d^2 x}{dx^3}\right) = \dfrac{1}{dx}.\,d\left\{\dfrac{1}{dx}.\,d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\right\},\ \text{etc}\ldots \end{array}\right.$$

Um auf den Fall zurückzukommen, wo x unabhängig veränderlich ist, braucht man bloß dx constant und folglich $d^2 x = 0$, $d^3 x = 0$ etc. zu setzen. Alsdann verwandeln sich die Formeln (9) in:

$$(10) \quad f'(x) = \frac{dy}{dx},\ f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2},\ f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3},\ \text{etc}\ldots,$$

d. h. sie reduciren sich auf die Gleichungen (4). Vergleicht man diese letzten Gleichungen mit den Gleichungen (9), so ergibt sich, daß, wenn man die successiven abgeleiteten Functionen von f(x), durch die Differenziale der Veränderlichen x und y = f(x) ausdrückt, die abgeleitete Function der ersten Ordnung die einzige ist, welche denselben Ausdruck behält, wenn x als unabhängig veränderlich betrachtet wird, oder aufhört, es zu sein. Um von dem ersten Falle zu dem zweiten überzugehen, muß man

$$\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3} \text{ für } \frac{d^2y}{dx^2},$$

$$\frac{dx(dx\,d^3y - dy\,d^3x) - 3d^2x(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{dx^5} \text{ für } \frac{d^3y}{dx^3}, \text{ etc...}$$

setzen; und Substitutionen dieser Art sind es, durch welche man eine **Vertauschung der unabhängig veränderlichen Größen** bewerkstelligen kann.

Unter den zusammengesetzten Functionen einer einzigen veränderlichen Größe gibt es welche, deren successive Differenziale unter einer sehr einfachen Form erscheinen. Es mögen z. B. u, v, w verschiedene Functionen von x bezeichnen, so findet man, wenn man jede der zusammengesetzten Functionen:

$$u+v,\ u-v,\ u+v\sqrt{-1},\ au+bv+cw+\ldots$$

n mal differenzirt;

$$(11)\ \begin{cases} d^n(u+v) = d^n u + d^n v,\ d^n(u-v) = d^n u - d^n v, \\ d^n(u+v\sqrt{-1}) = d^n u + d^n v\sqrt{-1}. \end{cases}$$

$$(12)\ d^n(au+bv+cw+\ldots) = a\,d^n u + b\,d^n v + c\,d^n w + \ldots$$

Aus der Formel (12) folgt, daß das Differenzial $d^n y$ der ganzen Function:

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots px^2 + qx + r,$$

sich für $n = m$ auf die Constante $1.2.3\ldots m\,a\,dx^m$, und für $n > m$, auf Null reducirt.

Vierte Vorlesung.

Relationen, welche zwischen den reellen Functionen einer einzigen Veränderlichen und ihren abgeleiteten Functionen oder Differenzialen statt finden.

Nachdem wir gelehrt haben, wie die abgeleiteten Functionen und Differenziale der Functionen von einer einzigen Veränderlichen gebildet werden, bleibt uns noch übrig, zu zeigen, welchen Gebrauch man davon machen kann, und ihre Haupteigenschaften anzugeben. In dieser Absicht wollen wir zuerst verschiedene Relationen aufstellen, welche zwischen den abgeleiteten Functionen der verschiedenen Ordnungen und den reell vorausgesetzten Functionen selbst statt finden. Diese Relationen werden in den sogleich folgenden Lehrsätzen ausgedrückt.

Lehrsatz 1. Die Function $y = f(x)$, welche als reell und in Beziehung auf die Veränderliche x in der Nähe des besondern Werthes $x = x_0$ dieser Veränderlichen als continuirlich vorausgesetzt wird, wächst, oder nimmt mit dieser Veränderlichen von dem Werthe $x = x_0$ an gleichzeitig ab, wenn der correspondirende Werth der abgeleiteten Function $y' = \frac{dy}{dx}$ positiv und endlich ist. Ist aber dieser letzte Werth endlich und negativ, so wird die Function y für wachsende Werthe von x abnehmen, und für abnehmende Werthe dieser Veränderlichen wachsen.

Beweis. Es seien Δx, Δy die unendlich kleinen und simultanen Incremente der Veränderlichen x, y; so ist die Grenze des Verhältnisses $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y'$. Hieraus folgt, daß das Verhältniß $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für sehr kleine Zahlenwerthe von Δx und für einen besondern Werth x_0 von x positiv ist, wenn der correspondirende Werth von y' eine positive und endliche Größe ist; negativ aber, wenn dieser Werth von y' endlich und negativ ist. Da

im ersten Falle die unendlich kleinen Differenzen Δx, Δy dasselbe Zeichen haben, so wird die Function y mit der Veränderlichen x, von dem besondern Werthe $x = x_0$ aus, gleichzeitig wachsen, oder abnehmen. Da die unendlich kleinen Differenzen Δx, Δy im zweiten Falle entgegengesetzte Zeichen haben, so wächst die Function y, wenn die Veränderliche x abnimmt, und nimmt ab, wenn die Veränderliche wächst.

Zusatz 1. Es sei $y = f(x)$ eine zwischen den gegebenen Grenzen $x = x_0$, $x = X$, stetig bleibende Function. Wenn man die Veränderliche x allmählich von der ersten Grenze bis zur zweiten wachsen läßt, so wird die Function y jedesmal wachsen, wenn die abgeleitete Function einen endlichen und positiven Werth hat, und abnehmen, so oft diese abgeleitete Function einen negativen Werth bekommt. Folglich wird die Function y nur insofern vom Wachsen zum Abnehmen, oder vom Abnehmen zum Wachsen übergehen können, als die abgeleitete Function y' vom Positiven zum Negativen, oder umgekehrt, übergehen wird. Es ist zu bemerken, daß die abgeleitete Function in diesem Uebergange Null wird, wenn sie continuirlich bleibt.

Zusatz 2. Wir wollen annehmen, daß die Function $y = f(x)$ für den besondern Werth $x = x_0$ verschwinde, und in der Nähe dieses Werthes continuirlich bleibe. Ist der correspondirende Werth der abgeleiteten Function $y' = f'(x)$ endlich und positiv, so wird, wenn man x sehr wenig von x_0 verschieden annimmt,

$$f(x) > 0 \text{ für } x > x_0, \text{ und } f(x) < 0 \text{ für } x < x_0$$

sein. Wenn im Gegentheil der Werth von y' endlich und negativ ist, so wird man haben:

$$f(x) < 0 \text{ für } x > x_0, \text{ und } f(x) > 0 \text{ für } x < x_0.$$

Lehrsatz 2. Es seien $f(x)$ und $F(x)$ zwei reelle Functionen, welche für $x = x_0$ verschwinden, und welche zwischen den Grenzen $x = x_0$, $x = X$ continuirlich bleiben. Ueberdies wollen wir setzen, die abgeleitete Function $F'(x)$ verändere das Zeichen nicht zwischen den angeführten Grenzen. Bezeichnet man in diesem Intervalle den kleinsten Werth des Verhältnisses:

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

durch A und den größten durch B, so liegt der Bruch:

$$\frac{f(X)}{F(X)}$$

zwischen den beiden Grenzen A und B.

Beweis. Da man nach der Voraussetzung für alle zwischen x_0 und X liegende Werthe von x

$$\frac{f'(x)}{F'(x)} - A > 0, \quad \frac{f'(x)}{F'(x)} - B < 0$$

hat, und die Function $F'(x)$ zwischen diesen Grenzen ihr Zeichen nicht ändert; so kann man behaupten, daß in diesem Intervalle eins der Producte:

$$F'(x)\left\{\frac{f'(x)}{F'(x)} - A\right\} = f'(x) - AF'(x),$$

$$F'(x)\left\{\frac{f'(x)}{F'(x)} - B\right\} = f'(x) - BF'(x).$$

stets positiv sein wird und das andere negativ. Außerdem sind diese Producte die abgeleiteten Functionen von:

$$f(x) - AF(x), \quad f(x) - BF(x).$$

Folglich wird nach dem oben Gesagten (Lehrsatz 1, Zusatz 1) eine dieser Functionen von $x = x_0$ bis $x = X$ stets wachsen, und die andere beständig abnehmen. Also werden ihre Werthe, weil sie für $x = x_0$ zu gleicher Zeit verschwinden, welche sie für $x = X$ bekommen, d. h.

$$f(X) - AF(X), \quad f(X) - BF(X)$$

Größen von entgegengesetzten Zeichen sein; und dasselbe wird von den Quotienten gelten, welche erhalten werden, wenn man diese Größen durch $F(X)$ dividirt, d. h. von den Differenzen:

$$\frac{f(X)}{F(X)} - A, \quad \frac{f(X)}{F(X)} - B.$$

Folglich liegt der Bruch $\frac{f(X)}{F(X)}$ zwischen A und B.

Wenn die abgeleiteten Functionen $f'(x)$, $F'(x)$ zwischen den Grenzen $x = x_0$, $x = X$ selbst continuirlich sind, so wird das Verhältniß $\frac{f'(x)}{F'(x)}$, während man von der einen Grenze zur andern übergeht, sich dergestalt ändern, daß es stets zwischen den beiden Werthen A, B liegen, und successive alle zwischenliegende Werthe annehmen wird. Also wird jede zwischen A und B liegende Größe z. B. der Bruch $\frac{f(X)}{F(X)}$, ein Werth des Verhältnisses $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ sein, welcher einem zwischen x_0 und X liegenden Werthe ξ von x entspricht; so daß:

$$\frac{f(X)}{F(X)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \tag{1}$$

ist.

The functions f + F must vanish for x = x₀ + having their D. continuous may be regarded themselves as continuous

Setzt man der Bequemlichkeit wegen $X = x_0 + h$, so wird die Größe ξ von der Form $x_0 + h_1$ sein, wo h_1 eine Größe von demselben Zeichen, aber von einem kleinern Zahlenwerthe ist als h, und die Gleichung (1) verwandelt sich in:

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)} = \frac{f'(x_0+h_1)}{F'(x_0+h_1)}, \tag{2}$$

d. h., wenn man durch θ eine Zahl bezeichnet, welche kleiner ist als die Einheit; so kann man diese Zahl so wählen, daß der Gleichung:

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)} = \frac{f'(x_0+\theta h)}{F'(x_0+\theta h)} \tag{3}$$

Genüge geleistet wird.

Zusatz 2. Wenn die Functionen:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x),\ f'(x),\ f''(x), \ldots . f^{(n-1)}(x), \\ F(x),\ F'(x),\ F''(x), \ldots . F^{(n-1)}(x), \end{array} \right. \tag{4}$$

alle für $x = x_0$ verschwinden, und nebst $f^{(n)}(x)$, $F^{(n)}(x)$ zwischen den Grenzen $x = x_0$, $x = x_0 + h$ continuirlich bleiben; so erhält man vermöge der Gleichung (2), wenn man jede der abgeleiteten Functionen

$$F'(x),\ F''(x),\ F'''(x), \ldots . F^{(n)}(x)$$

von der ersten bis zur zweiten Grenze immer positiv, oder immer negativ setzt, und durch h_1, h_2, h_3, ... h_n Größen von demselben Zeichen, aber deren Zahlenwerthe beständig kleiner werden, bezeichnet, eine Reihe ähnlicher Gleichungen, deren Verbindung folgende Formel gibt:

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)} = \frac{f'(x_0+h_1)}{F'(x_0+h_1)} = \frac{f''(x_0+h_2)}{F''(x_0+h_2)} = \ldots = \frac{f^{(n)}(x_0+h_n)}{F^{(n)}(x_0+h_n)}. \tag{6}$$

Wenn man in der Gleichung (6) bloß den ersten Bruch dem letzten gleichsetzt, so kann man die daraus entspringende Gleichung folgender Gestalt schreiben:

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)} = \frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{F^{(n)}(x_0+\theta h)}; \tag{7}$$

wo θ eine Zahl bezeichnet, die kleiner ist, als die Einheit.

Zusatz 3. Setzt man in der Formel (3) $x_0 = 0$, $F(x) = x$, so folgt daraus:

$$f(h) = h f'(\theta h). \tag{8}$$

Ebenso findet man, wenn man in der Formel (7), $x_0 = 0$, $F(x) = x^n$ setzt:

$$F^{(n)}(x) = 1.2.3\ldots n,\quad \frac{f(h)}{h^n} = \frac{f^{(n)}(\theta h)}{1.2.3\ldots n},$$

folglich:

$$(9)\qquad f(h) = \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(\theta h).$$

Man kann also folgende beiden Sätze aufstellen:

Lehrsatz 3. Wenn die Function $f(x)$ mit der Veränderlichen x verschwindet, und nebst ihrer abgeleiteten Function $f'(x)$ von $x = 0$ bis $x = h$ stetig bleibt; so gibt es zwischen den Grenzen 0 und 1 einen Werth von θ, welcher der Gleichung Genüge leistet:

$$(10)\qquad f(h) = h f'(\theta h).$$

Lehrsatz 4. Wenn die Functionen:

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x), \ldots\ldots f^{(n-1)}(x)$$

mit der Veränderlichen x verschwinden, und nebst der derivirten Function $f^{(n)}(x)$ von $x = 0$ bis $x = h$ stetig bleiben; so gibt es zwischen 0 und 1 einen Werth von θ, welcher der Gleichung genügt:

$$(12)\qquad f(h) = \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(\theta h).$$

Es sei nun $f(x)$ eine Function von x, welche für $x = x_0$ einen endlichen, positiven oder negativen Werth erhält, und, so wie die abgeleitete Function $f'(x)$, von $x = x_0$ bis $x = X$ stetig bleibt. Setzt man:

$$(12)\qquad f(x) = f(x) - f(x_0),\quad F(x) = x - x_0,$$

so ist:

$$(13)\qquad f'(x) = f'(x),\quad F'(x) = 1,$$

Mithin geben die Formeln (1) und (8):

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = f'(\xi),$$

oder:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0 + \theta h).$$

Man kann folglich den folgenden Lehrsatz aussprechen:

Lehrsatz 5. Wenn die Function $f(x)$ für $x = x_0$ einen endlichen Werth behält, und nebst ihrer abgeleiteten Function $f'(x)$ von $x = x_0$ bis $x = x_0 + h$ continuirlich bleibt; so gibt es zwischen den Grenzen 0

und 1 einen Werth von 0, durch welchen der Gleichung:

$$(16)\qquad f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h)$$

genügt wird.

Ebenso erhält man, wenn man in der Formel (7)

$$(17)\qquad \mathrm{f}(x)=f(x)-f(x_0,\ \mathrm{F}(x)=(x-x_0)^n$$

setzt, folgenden andern Lehrsatz:

Lehrsatz 6. Wenn sich die erste der Functionen:

$$(18)\qquad f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ldots f^{(n-1)}(x)$$

für $x=x_0$ auf eine endliche Größe, die übrigen auf Null reduciren, und alle nebst $f^{(n)}(x)$ von $x=x_0$ bis $x=x_0+h$ stetig bleiben; so existirt zwischen den Grenzen 0 und 1 ein Werth von θ, durch welchen der Gleichung:

$$(19)\qquad f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x_0+\theta h)$$

ein Genüge geschieht.

Uebrigens sind die Formeln (16) und (19) in denen enthalten, welche man aus den Gleichungen (3) und (7) herleitet, wenn man für die Functionen f und F zwei andere f und F substituirt, welche mit den beiden ersten durch die Gleichungen:

$$(20)\qquad \mathrm{f}(x)=f(x)-f(x_0),\ \mathrm{F}(x)=F(x)-F(x_0)$$

verbunden sind. Denn alsdann folgt aus der Gleichung (3):

$$(21)\qquad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{F(x_0+h)-F(x_0)}=\frac{f'(x_0+\theta h)}{F'(x_0+\theta h)};$$

und aus der Gleichung (7):

$$(22)\qquad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{F(x_0+h)-F(x_0)}=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{F^{(n)}(x_0+\theta h)}.$$

Die Formel (22), welche der Formel (21) gleich wird, wenn $n=1$ ist, setzt voraus: 1) daß sich die Functionen $f(x)$, $F(x)$ für $x=x_0$ auf endliche Größen und die abgeleiteten Functionen:

$$(23)\qquad \begin{cases} f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ldots f^{(n-1)}(x), \\ F'(x),\ F''(x),\ F'''(x),\ldots F^{(n-1)}(x), \end{cases}$$

auf Null reduciren; 2) daß jede der abgeleiteten Functionen:

$$(24)\qquad F'(x),\ F''(x),\ldots F^{(n-1)}(x),\ F^{(n)}(x),$$

zwischen den Grenzen $x=x_0$ bis $x=X$ das Zeichen nicht ändere; 3) daß die Functionen (23) und $f(x)$, $F(x)$, $f^{(n)}(x)$, $F^{(n)}(x)$ zwischen diesen Grenzen stetig bleiben.

Fünfte Vorlesung.

Bestimmung der Werthe, welche reelle Functionen einer einzigen Veränderlichen annehmen, wenn sie unter den unbestimmten Formen: $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $0\times\pm\infty$, 0^0, ∞^0, $1^{\pm\infty}$ etc.... erscheinen.

Die in der vorhergehenden Vorlesung aufgestellten Sätze geben das Mittel an die Hand, den wahren Werth eines Bruches, dessen beide Glieder reelle Functionen der Veränderlichen x sind, in dem Falle zu bestimmen, wo man der Veränderlichen einen besondern Werth beilegt, für welchen der Bruch sich unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ zeigt. Denn es sei:

$$(1) \qquad s=\frac{f(x)}{F(x)}$$

dieser Bruch, und gesetzt, der besondere Werth $x=x_0$ reducire s auf die Form $\frac{0}{0}$ oder mache $f(x)$, und $F(x)$ verschwinden; so wird der $x=x_0$ entsprechende Werth von s nichts anders sein, als die Grenze, welcher sich s unbestimmt nähert, während sich x dem Werthe x_0 nähert. Dieses vorausgesetzt, sei X eine sehr wenig von x_0 verschiedene, und ξ eine zwischen x_0 und X liegende Größe. Da im Allgemeinen jede der Functionen $f(x)$, $F(x)$, $f'(x)$, $F'(x)$ stetig bleiben, und von dem durch x_0 bezeichneten besondern Werthe von x bis zu einem sehr nahe liegenden $x=X$ dasselbe Zeichen behalten wird; so kann man vermöge der Formel (1) der 4ten Vorlesung die Größe ξ so wählen, daß die Gleichung:

$$(2) \qquad \frac{f(X)}{F(X)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

verificirt wird.

Wenn sich nun die Größe X der Grenze x_0 unbestimmt nähert, so wird solches um so mehr mit der Größe ξ der Fall sein,

und der zweite Theil der Gleichung (1) wird offenbar den Werth des Bruches:

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

zur Grenze haben, welcher $x = x_0$ entspricht. Man kann also folgenden Satz aussprechen:

Lehrsatz 1. Wenn ein besonderer Werth des Verhältnisses $\frac{f(x)}{F(x)}$ unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint, so fällt dieser Werth mit dem correspondirenden Werthe des Verhältnisses $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ zusammen.

Beispiele. Nach dem vorhergehenden Lehrsatze hat man für $x = 0$:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2,$$

$$\frac{\sin x^2}{x} = \frac{2x \cos x^2}{x} = 0, \quad \frac{\sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{2x} = \frac{1}{0}, \text{ etc.} \ldots$$

für $x = 1$:

$$\frac{l(x)}{x - 1} = \frac{1}{x} = 1, \quad \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{x - 1}{x^n - 1} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n}, \text{ etc.} \ldots$$

Es verdient bemerkt zu werden, daß die Gleichung (2) und der Lehrsatz 1 sich auch auf den Fall erstrecken, wo die Constante x_0 unendlich wird. Nur drücken X und ξ alsdann Größen von demselben Zeichen, als x_0, aber von sehr großen Zahlenwerthen aus, und der Zahlenwerth von ξ ist größer, als der von X.

Wenn die Functionen $f'(x)$, $F'(x)$ auch für $x = x_0$ verschwänden, so würde der besondere Werth des Verhältnisses $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ selbst unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen und nach Lehrsatz 1 mit dem correspondirenden Werthe des Verhältnisses:

$$\frac{f''(x)}{F''(x)}$$

übereinstimmen, dessen beide Glieder die abgeleiteten Functionen der ersten Ordnung von $f'(x)$ und von $F'(x)$ sind. Wenn die Functionen $f''(x)$, $F''(x)$ noch verschwänden, so müßte man, um den gesuchten Werth von s zu erhalten, zu dem Bruche:

$$\frac{f'''(x)}{F'''(x)}$$

übergehen; etc. Fährt man auf diese Weise fort, so ergibt sich aus dem ersten Lehrsatze folgender:

Lehrsatz 2. Wenn die Functionen:

$$(4)\quad \begin{cases} f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ldots f^{(n-1)}(x), \\ F(x),\ F'(x),\ F''(x),\ldots F^{(n-1)}(x), \end{cases}$$

alle für den besondern Werth $x = x_0$ verschwinden, so fällt der entsprechende Werth des Verhältnisses:

$$(1)\qquad s = \frac{f(x)}{F(x)}$$

mit dem des Verhältnisses:

$$\frac{f^{(n)}(x)}{F^{(n)}(x)}$$

zusammen.

Beispiele. Nach dem Lehrsatz 2 ist für $x = 0$:

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{\sin x}{2x} = \frac{\cos x}{2} = \tfrac{1}{2},\quad \frac{x-\sin x}{x^3} = \tfrac{1}{3}.\ \frac{1-\cos x}{x^2} = \tfrac{1}{6},$$

$$\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2. \text{ etc.}$$

Setzt man in den Lehrsätzen 1 und 2 der Kürze wegen:

$$f(x) = y,\ F(x) = z,$$

so hat man diesen Lehrsätzen gemäß, für $x = x_0$:

$$(6)\qquad \frac{y}{z} = \frac{y'}{z'} = \frac{dy}{dz},$$

oder:

$$(7)\qquad \frac{y}{z} = \frac{y^{(n)}}{z^{(n)}} = \frac{d^n y}{dz^n}.$$

Die Gleichung (6) setzt voraus, daß der Werth von $\frac{y}{z}$ für $x = x_0$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheint, und die Gleichung (7), daß sich die correspondirenden Werthe von

$$\frac{y'}{z'},\ \frac{y''}{z''},\ldots\frac{y^{(n-1)}}{z^{(n-1)}}$$

unter derselben Form zeigen.

Wenn der particuläre Werth $x = x_0$ die beiden Functionen $y = f(x)$, $z = F(x)$ unendlich macht, so würde derselbe die beiden Ausdrücke:

(8) $$\frac{1}{x},\ \frac{1}{z}$$

auf Null reduciren; und da die abgeleiteten Functionen dieser Ausdrücke respective gleich:

(9) $$-\frac{y'}{y^2},\ -\frac{z'}{z^2},$$

sind; so würde man nach dem ersten Lehrsatze haben:

$$\frac{-\frac{y'}{y^2}}{-\frac{z'}{z^2}}=\frac{\left(\frac{1}{y}\right)}{\left(\frac{1}{z}\right)},$$

oder:

$$\frac{z^2}{y^2}\times\frac{y'}{z'}=\frac{z}{y}.$$

Multiplicirt man die beiden Theile der vorigen Gleichung durch $\frac{y^2}{z^2}$, so folgt:

$$\frac{y'}{z'}=\frac{y}{z}.$$

Folglich erstreckt sich die Formel (6) auch auf den Fall, wo sich das Verhältniß $\frac{y}{z}=\frac{f(x)}{F(x)}$ unter der unbestimmten Form $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ zeigt, und man muß mit dem Lehrsatze 1 noch den folgenden verbinden:

Lehrsatz 3. Wenn ein besonderer Werth des Verhältnisses $\frac{f(x)}{F(x)}$ sich unter der unbestimmten Form $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ zeigt, so stimmt dieser Werth mit dem entsprechenden Werthe des Verhältnisses $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ überein.

Beispiel. Es ist für $x=0$:

$$\frac{l\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot x}=\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{\sin x}{x}.\sin x=\sin x=0.$$

Zusatz. Der Lehrsatz 3. erstreckt sich, ebensowohl als der erste, auch auf den Fall, wo der der Veränderlichen x beigelegte, besondere Werth unendlich wird. Folglich ist, wenn der Zahlenwerth der Function $f(x)$ mit dem der Veränderlichen x unbestimmt wächst, für $x=\pm\infty$,

$$(10)\qquad \frac{f(x)}{x} = f'(x).$$

Angenommen, man setzte $f(x)$ successive den beiden Functionen:

$$A^x,\ L(x)$$

gleich, wo A eine Zahl bezeichnet, die größer ist als die Einheit, und $L(x)$ einen Logarithmus aus dem Systeme, dessen Basis A ist.

Da von den abgeleiteten dieser beiden Functionen, d. h. von

$$A^x\, l(A),\ \frac{L(e)}{x},$$

die erste unendlich und die zweite Null wird, für unendlich große Werthe der Veränderlichen x; so folgt aus der Formel (10), indem man x gegen die Grenze ∞ convergiren läßt:

$$(11)\qquad \lim \frac{A^x}{x} = \infty, \qquad (12)\qquad \lim \frac{L(x)}{x} = 0.$$

Aus den Formeln (11) und (12) folgt: 1) daß, wenn $A > 1$ gesetzt wird, die Exponentialgröße A^x zuletzt weit schneller wächst, als die Veränderliche x; 2) daß die Logarithmen der Zahlen, in einem Systeme, dessen Basis größer ist, als die Einheit, nicht so schnell als die Zahlen selbst wachsen.

Wenn die abgeleiteten Functionen $f'(x)$, $F'(x)$ beide unendlich würden, so würde sich der besondere Werth des Verhältnisses $\frac{f'(x)}{F(x)}$ auch unter der Form $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ darstellen, und nach dem Lehrsatz 3. mit dem correspondirenden Werthe des Verhältnisses:

$$\frac{f''(x)}{F''(x)},$$

dessen beide Glieder die abgeleiteten Functionen der ersten Ordnung von $f'(x)$, $F'(x)$ sind, übereinkommen. Wenn die Functionen $f''(x)$, $F''(x)$ selbst unendlich würden; so würde man genöthigt sein, zu dem Bruche:

$$\frac{f'''(x)}{F'''(x)}$$

fortzugehen, etc. Fährt man so fort, so leitet man aus dem Lehrsatze 3 leicht folgenden Satz ab:

Lehrsatz 4. Wenn die Functionen (4) alle für den besondern Werth $x = x_0$ unendlich werden; so wird der correspondirende Werth des Verhältnisses:

$$s = \frac{f(x)}{F(x)}$$

mit dem des Verhältnisses:

$$\frac{f^{(n)}(x)}{F^{(n)}(x)}$$

zusammenfallen.

Beispiel. Sei a eine positive Constante, und n die nächstgrößere ganze Zahl als a; so hat man nach dem Lehrsatze 4 für $x=\infty$,

$$\frac{x^a}{e^x}=\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)x^{a-n}}{e^x}=\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{e^x x^{n-a}}=0,$$

oder was dasselbe ist:

$$(13)\qquad x^a e^{-x}=0.$$

Die obigen Lehrsätze dienen zur Bestimmung der Werthe der Brüche, welche sich unter der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ darstellen; und es muß noch bemerkt werden, daß sich daraus die Werthe der Functionen einer einzigen Veränderlichen ableiten lassen, welche unter einer der unbestimmten Formen erscheinen:

$$0\times\pm\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^{\pm\infty}\ \text{etc.}$$

Bezeichnet man z. B. durch y und z zwei Functionen von x, wovon die erste für $x=x_0$ Null, und die zweite unendlich wird; so wird der $x=x_0$ entsprechende Werth der Function

$$(14)\qquad u=yz$$

die Form $0\times\pm\infty$ annehmen, und offenbar mit denen der Verhältnisse:

$$\frac{y}{\left(\frac{1}{z}\right)}\ \text{und}\ \frac{z}{\left(\frac{1}{y}\right)}$$

übereinstimmen, welche vermittelst der Lehrsätze 1, 2, 3 oder 4 bestimmt werden können, weil sie unter den Formen $\frac{0}{0}$ und $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ erscheinen. Es ist z. B. nach dem Lehrsatze 1 für $x=\infty$:

$$(15)\qquad e^{-x}l(x)=\frac{l(x)}{e^x}=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{e^x}=0;$$

und für $x=0$ nach Lehrsatz 3:

$$(16)\qquad x\,l(x)=\frac{l(x)}{x^{-1}}=\frac{x^{-1}}{-x^{-2}}=-x=0,$$

$$(17)\qquad x^a l(x)=\frac{l(x)}{x^{-a}}=\frac{x^{-1}}{-a\,x^{-a-1}}=-\frac{x^a}{a}=0,$$

wo a eine positive Constante ist.

Desgleichen, wenn die Functionen y und z so beschaffen sind, daß man für $x = x_0$ habe:

$$y = 0 \text{ und } z = 0,$$

oder: $$y = \infty \text{ und } z = 0,$$

oder auch: $$y = 1 \text{ und } z = \pm\infty;$$

so wird der $x = x_0$ entsprechende Werth von

$$s = y^z \tag{18}$$

unter einer der unbestimmten Formen:

$$0^0,\ \infty^0,\ 1^{\pm\infty},$$

erscheinen. Um nun diesen Werth zu finden, braucht man nur zu bemerken, daß zufolge der Gleichung (18)

$$l(s) = z\,l(y) = \frac{l(y)}{z^{-1}},$$

und folglich

$$s = e^{\frac{l(y)}{z^{-1}}} \tag{19}$$

ist, und dann den Werth des Verhältnisses:

$$\frac{l(y)}{z^{-1}}$$

nach den Lehrsätzen 1, 2, 3 oder 4 zu bestimmen. So läßt sich z. B. unmittelbar aus den Lehrsätzen 1 und 3, verbunden mit der Formel (19), folgender Satz herleiten:

Lehrsatz 5. Wenn ein particulärer Werth des Ausdrucks y^z unter einer der unbestimmten Formen 0^0, ∞^0, $1^{\pm\infty}$ erscheint, so fällt dieser mit dem correspondirenden Werthe der Exponentialgröße:

$$e^{\frac{-y'z^2}{yz'}} \tag{21}$$

zusammen.

Zusatz 1. Es sei $y = f(x)$ und $z = x$, wo $f(x)$ eine Function bezeichnet, welche für $x = 0$ verschwindet; so findet man für $x = 0$:

$$[f(x)]^x = e^{-\frac{x^2 f'(x)}{f(x)}}. \tag{22}$$

So z. B. ist für $x = 0$:

$$x^x = e^{-x} = 1. \tag{23}$$

Zusatz 2. Sei $y = f(x)$ und $z = \frac{1}{x}$, indem $f(x)$ eine Function bezeichnet, deren Zahlenwerth mit dem der Veränderlichen x

unbestimmt wächst; so findet man für $x=\infty$:

$$(24)\qquad [f(x)]^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}.$$

und wenn man $f(x)=x$ setzt:

$$(25)\qquad x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Zusatz 3. Es sei $y=x$ und $z=F(x)$, wo $F(x)$ eine Function bezeichnet, welche für $x=1$ einen unendlichen Werth bekommt; so hat man für $x=1$:

$$(26)\qquad x^{F(x)} = e^{-\frac{F(x)}{xF'(x)} \cdot F(x)},$$

und wenn man $F(x)=\frac{1}{1-x}$ setzt:

$$(27)\qquad x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}.$$

Wir wollen uns bei der Betrachtung der verschiedenen unbestimmten Formen, unter welchen sich die besondern Werthe der Functionen mit einer veränderlichen Größe darbieten können, nicht länger aufhalten, weil sie sich, z. B. 1^{∞}, $\sqrt[\infty]{\infty}$..., leicht auf die bereits betrachteten Formen zurückführen lassen; und schließen diese Vorlesung mit der Bemerkung, daß man die Anwendung der Lehrsätze 1, 2, etc... in mehreren Fällen durch einige analytische Kunstgriffe, wie z. B. die Zerlegung der Functionen in Factoren, vereinfachen kann. So ist z. B. nach dem Lehrsatze 1 für $x=0$:

$$\frac{1-\cos x}{\sin x^2} = \frac{\sin x}{2x\cos x^2} = \frac{1}{2\cos x^2}\cdot\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos x} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{e^{1/2 x} - e^{-1/2 x}}{\sin\frac{1}{2}x}\right\}^2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{e^{1/2 x} + e^{-1/2 x}}{\cos\frac{1}{2}x}\right\}^2 = 2.$$

etc...

Sechste Vorlesung.

Ueber die abgeleiteten Functionen, welche unendlich kleine Größen ausdrücken.

Sei $f(i)$ eine reelle Function, welche mit der Veränderlichen i gleichzeitig verschwindet, und diese Veränderliche die Basis eines Systems unendlich kleiner Größen. Ferner sei a eine constante, rationale oder irrationale Zahl; so ist nach dem, was in den Vorerinnerungen gesagt worden, $f(i)$ ein unendlich Kleines der Ordnung a, wenn die Grenze des Verhältnisses:

$$(1) \qquad \frac{f(i)}{i^r}$$

für alle kleinern Werthe von r als a, Null, und für alle größern Werthe von r als a unendlich ist. Hiernach wird es im Allgemeinen leicht sein, die Ordnung einer unendlich kleinen Größe zu bestimmen, und bloß in gewissen Fällen wird der Werth von Ausdrücken, welche sich unter unbestimmter Form darbieten, nach den in der vorhergehenden Vorlesung aufgestellten Sätzen zu bestimmen sein.

Betrachtet man z. B. das Product:

$$(2) \qquad i^a \, l(i),$$

so wird man leicht finden: 1) daß dieses Product mit der Veränderlichen i ebensowohl verschwindet, als das Product $x^a \, l(x)$ mit der Veränderlichen x (siehe Formel 17. Vorles. 5); 2) daß das Verhältniß:

$$\frac{i^a \, l(i)}{i^r} = i^{a-r} \, l(i) = \frac{l(i)}{i^{r-a}}$$

ebenfalls für positive Werthe von $a-r$ verschwindet, und für positive Werthe von $r-a$ einen unendlichen Werth bekommt. Also ist der Ausdruck (2) eine unendlich kleine Größe der Ordnung a.

Ebenso, weil der Bruch:

$$(13) \qquad \frac{i^a}{l(i)}$$

mit i verschwindet, während sich das Verhältniß:

$$\frac{i^a}{i^r l(i)} = \frac{i^{a-r}}{l(i)} = \frac{1}{i^{r-a} l(i)},$$

auf Null reducirt für positive Werthe von $a-r$, und auf $\frac{1}{0}$ für positive Werthe von $r-a$; so kann man behaupten, daß der Ausdruck (3) ein unendlich Kleines der Ordnung a ist. Dasselbe gilt von den Producten:

$$i^a e^i l(i), \ \frac{i^a e^i}{l(i)},$$

welche wir schon in den Vorerinnerungen betrachtet haben, und welche gebildet werden, wenn man die Ausdrücke (2) und (3) durch den neuen Factor e^i multiplicirt, der den endlichen Werth 1 erhält für $i=0$.

Setzt man in dem Ausdrucke (3), $a=0$, so erhält man das Verhältniß:

$$(4) \qquad \frac{1}{l(i)},$$

welches eine unendlich kleine Größe der Ordnung $a=0$ ist. Dieses Verhältniß verschwindet wirklich mit i. Aber, wenn man es durch i^r dividirt, so hat man für $i=0$:

$$\frac{1}{i^r l(i)} = \frac{1}{0},$$

wo der Exponent r einen beliebig kleinen positiven Werth hat.

Ferner ergibt sich leicht, daß der Ausdruck:

$$(5) \qquad e^{-\frac{1}{i}}$$

eine unendlich kleine Größe der Ordnung ∞ ist. Denn dieser Ausdruck verschwindet für $i=0$, und wenn man nach der Division mit i^r, $\frac{1}{i}=x$ setzt; so findet man für $i=0$ oder für $x=\infty$:

$$\frac{e^{-\frac{1}{i}}}{i^r} = x^r e^{-x} = \frac{x^r}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0, \text{ (Formel 13, Vorles. 5.)}$$

wo der Exponent r einen so großen positiven Werth hat, als man nur will.

Nun sei, indem $f(i)$ ein unendlich Kleines der Ordnung a ist, n die ganze Zahl, welche der Constante a gleich, oder unmittelbar größer als dieselbe ist; so wird das Verhältniß:

$$(6) \qquad \frac{f(i)}{i^n}$$

das erste Glied der geometrischen Progression:

$$(7)\qquad f(\mathrm{i}),\ \frac{f(\mathrm{i})}{\mathrm{i}},\ \frac{f(\mathrm{i})}{\mathrm{i}^2},\ \frac{f(\mathrm{i})}{\mathrm{i}^3},\ \text{etc}\ldots$$

sein, welches für $\mathrm{i}=0$ nicht mehr verschwindet, oder was auf dasselbe hinausläuft, welches keine unendlich kleine Größe mehr ist; und man muß bloß gewisse besondere Fälle ausnehmen, in welchen die Constante a der ganzen Zahl n gleich ist. Denn das Verhältniß:

$$(8)\qquad \frac{f(\mathrm{i})}{\mathrm{i}^a},$$

welches aus dem Ausdrucke (1) abgeleitet wird, wenn man $r=a$ setzt, kann, wie in den Vorerinnerungen bemerkt wurde, einen endlichen Werth, einen Werth $=$ Null oder einen unendlichen Werth haben für $\mathrm{i}=0$. Wenn nun dieses Verhältniß verschwindet, und zugleich $a=n$ ist, so ist der Ausdruck:

$$(9)\qquad \frac{f(\mathrm{i})}{\mathrm{i}^{n+1}}$$

das erste Glied der Progression (7), welches keine unendlich kleine Größe mehr ist. Dieses ist z. B. der Fall, wenn man für $f(\mathrm{i})$ die Function:

$$(10)\qquad \frac{\mathrm{i}^n}{l(\mathrm{i})},$$

nimmt, deren Werth für $\mathrm{i}=0$, Null wird. Kurz, das erste Glied der Progression (7), welches nicht mehr mit i verschwindet, ist immer einer von den Ausdrücken (6) oder (9). Läßt man nun i gegen die Grenze Null convergiren, so findet man successive mit Bezugnahme auf die Lehrsätze 1 und 2 der vorigen Vorlesung:

$$\lim f(\mathrm{i})=0 \qquad \text{oder} \qquad f(0)=0,$$

$$\lim \frac{f(\mathrm{i})}{\mathrm{i}}=\lim f'(\mathrm{i})=0, \qquad f'(0)=0,$$

$$\lim \frac{f(\mathrm{i})}{\mathrm{i}^2}=\lim \frac{f''(\mathrm{i})}{1.2}=0, \qquad f''(0)=0$$

$$\text{etc}\ldots \qquad \text{etc}\ldots$$

$$\lim \frac{f(\mathrm{i})}{\mathrm{i}^{n-1}}=\lim \frac{f^{(n-1)}(\mathrm{i})}{1.2.3\ldots(n-1)}=0, \qquad f^{(n-1)}(0)=0,$$

$$\lim \frac{f(\mathrm{i})}{\mathrm{i}^n}=\lim \frac{f^{(n)}(\mathrm{i})}{1.2.3\ldots n}=\frac{f^{(n)}(0)}{1.2\ldots n} \qquad f^{(n)}(0)=1.2.3\ldots n.\lim \frac{f(\mathrm{i})}{\mathrm{i}^n}.$$

Folglich, wenn der Ausdruck (6) nicht mit i verschwindet, so ist $f^{(n)}(0)$ die erste der Größen:

$$(11)\qquad f(0),\ f'(0),\ f''(0),\ f'''(0),\ \text{etc....},$$

welche einen von Null verschiedenen Werth bekommt. Wenn im Gegentheil der Ausdruck (6) mit i verschwindet, so wird die Größe:

$$(12)\qquad f^{(n)}(0) = 1.2.3\ldots n \lim \frac{f(i)}{i^n}$$

auch Null sein, und man wird folglich haben:

$$\lim \frac{f(i)}{i^{n+1}} = \lim \frac{f^{(n+1)}(i)}{1.2.3\ldots n(n+1)} = \frac{f^{(n+1)}(0)}{1.2\ldots n(n+1)},$$

$$f^{(n+1)}(0) = 1.2\ldots n(n+1) \lim \frac{f(i)}{i^{n+1}}.$$

Da alsdann der Ausdruck (9) nicht mit i verschwindet, so wird $f^{(n+1)}(0)$ das erste Glied der Reihe (11) sein, welches einen andern Werth als Null erhält. Man kann also folgenden Satz aussprechen:

Lehrsatz 1. Es sei $f(i)$ eine unendlich kleine Größe der Ordnung a in dem Systeme, dessen Basis i ist, und n die ganze Zahl, welche gleich a oder zunächst größer ist als die Constante a. Wenn $n > a$ oder $n = a$ ist, und das Verhältniß:

$$\frac{f(i)}{i^n}$$

nicht den Werth Null für $i = 0$ bekommt; so ist

$$(13)\qquad f^{(n)}(i)$$

die erste der Functionen:

$$(14)\qquad f(i),\ f'(i),\ f''(i),\ f'''(i),\ \text{etc...},$$

welche mit i nicht mehr verschwindet. Hat man aber $n = a$, und

$$(15)\qquad \frac{f(i)}{i^n} = 0 \text{ für } i = 0,$$

so wird die Function:

$$(16)\qquad f^{(n+1)}(i)$$

das erste Glied der Reihe (14) sein, welches nicht mehr mit i verschwindet.

Ist nun f(x) eine reelle Function von x, welche so beschaffen ist, daß das Verhältniß:

$$(17)\qquad \frac{f(x)}{x^{n-1}}$$

für $x = 0$ verschwindet; so wird f(x), wenn die Veränderliche x als eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung ausdrückend

betrachtet wird, ein unendlich Kleines von der Ordnung $=n$ oder $>n$ sein, und dann folgt aus dem Lehrsatze 1, daß die Functionen:

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x), \ldots f^{(n-1)}(x)$$

alle für $x=0$ verschwinden. Mithin führt der Lehrsatz 4 der 4ten Vorlesung zu folgendem Lehrsatze:

Lehrsatz 2. Angenommen, daß die Functionen:

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x), \ldots f^{(n-1)}(x),\ f^{(n)}(x),$$

zwischen den Grenzen $x=0$, $x=h$ continuirlich sind, und daß das Verhältniß:

$$\frac{f(x)}{x^{n-1}} \tag{17}$$

mit der Veränderlichen x verschwindet; so kann man alsdann, wenn man der Veränderlichen x einen Werth h oder einen zwischen 0 und h liegenden Werth gibt, eine Zahl θ, kleiner als 1 finden, durch welche der Gleichung:

$$f(x) = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(\theta x) \tag{18}$$

Genüge geleistet wird.

Zusatz. Wenn man $n=1$ setzt, so reducirt sich die Gleichung (18) auf:

$$f(x) = x f'(\theta x). \tag{19}$$

Diese letzte Gleichung stimmt mit der Gleichung (10) der 4ten Vorlesung überein, und setzt voraus: 1) daß die Function $f(x)$ mit x verschwinde; 2) daß die Functionen $f(x)$, $f'(x)$ zwischen den Grenzen $x=0$, $x=h$ stetig bleiben, wo die abgeleitete Function übrigens für $x=0$ einen unendlichen Werth, oder eine Unterbrechung der Stetigkeit gestatten kann. Ferner lassen sich aus der Gleichung (19) leicht folgende Sätze ableiten.

Lehrsatz 3. Es sei $f(x)$ eine reelle Function, welche mit der Veränderlichen x verschwindet. Wenn diese Function und ihre abgeleitete $f'(x)$ zwischen den Grenzen $x=0$, $x=h$ stetig bleiben, wo h eine Größe ist, deren Zahlenwerth sehr klein angenommen werden kann; so wird Null der einzige Werth, oder einer der Werthe des Verhältnisses:

$$\frac{f(x)}{f'(x)} \tag{20}$$

für $x=0$ sein.

Beweis. Es genügt offenbar, den Lehrsatz 3 für den Fall zu beweisen, wo die abgeleitete Function $f'(x)$ für den besondern

Werth $x=0$ mit $f(x)$ zugleich verschwindet, weil der correspondirende Werth Null, welchen das Verhältniß $\frac{f(x)}{f'(x)}$ in jeder andern Hypothese hat, alsdann unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint.

Dividirt man nun die beiden Theile der Gleichung (19) durch $f'(x)$, so folgt:

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = x\,\frac{f'(\theta x)}{f'(x)}.$$

Hierauf wollen wir den Zahlenwerth von x abnehmen lassen; so wird, da θx eine zwischen 0 und x liegende Größe bezeichnet und $f'(0)=0$ ist, $f'(\theta x)$ schneller, als $f'(x)$ gegen Null convergiren, woraus folgt, daß der Bruch $\frac{f'(\theta x)}{f'(x)}$ eine Menge von kleinern Werthen als die Einheit, und das Product $x\frac{f'(\theta x)}{f'(x)}$ eine Menge gegen Null convergirender Werthe, bekommen wird. Folglich ist die Grenze dieses Productes und des dadurch ausgedrückten Verhältnisses (20) gleich Null.

Zusatz 1. Der Lehrsatz 3 kann bei den Functionen:

$$\sin x,\ 1-\cos x,\ e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2},\ x^3 \sin\frac{1}{x},\ \text{etc}\ldots$$

bestätigt werden.

Dieser Lehrsatz hat selbst in dem Falle statt, wo die Function $f(x)$ nur insofern reell oder unendlich klein ist, als man der Veränderlichen x unendlich kleine, mit einem gewissen Zeichen behaftete Werthe beilegt, welches z. B. der Fall ist, wenn man für $f(x)$ eine der Functionen:

$$(23)\qquad \frac{1}{l(x)},\ \sqrt{x},\ e^{-\frac{1}{x}},\ e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^3},\ \text{etc}\ldots$$

nimmt, welche nicht mehr reell oder unendlich klein sind, wenn man der Veränderlichen negative unendlich kleine Werthe gibt. Endlich kann dieser Lehrsatz statt finden, wenn gleich die abgeleitete Function $f'(x)$ discontinuirlich wird für $x=0$. Setzt man z. B.

$$(24)\qquad f(x) = x \sin\frac{1}{x},$$

so findet man, daß die abgeleitete Function:

$$(25)\qquad f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

für $x=0$ unbestimmt, folglich discontinuirlich wird; und läßt man alsdann x gegen die Grenze Null convergiren, so gestattet der aus

den Gleichungen (24) und (25) abgeleitete Werth des Verhältnisses (19), d. h.

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{x}{1 - \frac{1}{x}\cot\frac{1}{x}} \tag{26}$$

eine unendliche Menge von Grenzen, wovon eine gleich Null ist.

Zusatz 2. Wir wollen setzen, daß die Function $f(x)$ und ihre successiven abgeleiteten Functionen bis zur Ordnung $n-1$ stetig sind in der Nähe des besondern Werthes $x=0$, daß die n Größen

$$f(x),\ f'(0),\ f''(0) \ldots . f^{(n-1)}(0) \tag{27}$$

verschwinden, und daß der Zahlenwerth von x unbestimmt abnimmt; so wird Null die Grenze, oder eine der Grenzen sein, gegen welche jedes der Verhältnisse:

$$\frac{f(x)}{f'(x)},\ \frac{f'(x)}{f''(x)},\ \frac{f''(x)}{f'''(x)}, \ldots \frac{f^{(n-1)}(x)}{f^{(n)}(x)}, \tag{28}$$

und folglich ihr Product:

$$\frac{f(x)}{f^{(n)}(x)}, \tag{29}$$

convergirt. Dasselbe gilt von den Ausdrücken:

$$\frac{f'(x)}{f^{(n)}(x)},\ \frac{f''(x)}{f^{(n)}(x)}, \ldots \frac{f^{(n-1)}(x)}{f^{(n)}(x)}, \tag{30}$$

welche man erhält, wenn man irgend eins dieser Verhältnisse durch die darauf folgenden multiplicirt.

Lehrsatz 4. Wenn sich alles wie im Lehrsatz 3 verhält, so ist Null der einzige Werth, oder einer der Werthe des Productes:

$$x f'(x) \tag{31}$$

für $x=0$.

Beweis. Das Product (31) verschwindet offenbar mit der Veränderlichen x, wenn die abgeleitete Function $f'(x)$ für $x=0$ einen endlichen Werth behält. Wenn diese Function für $x=0$ unendlich würde, so würde, wenn man x gegen die Grenze Null convergiren läßt, aus der durch θ multiplicirten Gleichung (19) folgen:

$$0 = \lim\,[\theta f(x)] = \lim\,[\theta x f'(\theta x)].$$

Folglich würde Null auch der einzige Werth, oder einer der Werthe sein, welche das Product $\theta x f'(\theta x)$ für $\theta x = 0$ erhält; und folglich der einzige Werth, oder einer der Werthe, welche das Product $x f'(x)$ für $x=0$ erhält.

Zusatz. Der Lehrsatz 4 findet ferner auch in dem Falle statt, wo die Function f(x) nur so lange reell und unendlich klein bleibt, als der Veränderlichen x unendlich kleine Werthe mit einem gewissen Zeichen beigelegt werden, wie solches der Fall ist, wenn man für f(x) eine der Function (23) setzt. Setzt man z. B.

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x},$$

so kann das Product:

$$x f'(x) = x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

für $x = 0$ eine unendliche Menge, zwischen -1 und $+1$ liegender Werthe haben, wovon einer Null sein wird.

Lehrsatz 5. Es sei $f(x)$ eine reelle Function, welche für $x = 0$ einen endlichen und bestimmten Werth $f(0)$ bekommt. Wenn diese Function und ihre abgeleitete $f'(x)$ zwischen den Grenzen $x = 0$, $x = h$ stetig bleiben, wo h eine Größe bezeichnet, deren numerischer Werth sehr klein gesetzt werden kann; so wird Null der einzige Werth, oder einer der Werthe sein, welche das Product:

$$x f'(x) \tag{32}$$

für $x = 0$ annimmt.

Beweis. Um den Lehrsatz 5 aus dem Lehrsatze 4 abzuleiten, braucht man offenbar nur

$$f(x) = f(x) - f(0)$$

zu setzen. Ferner läßt sich leicht folgender Lehrsatz aufstellen:

Lehrsatz 6. Wir wollen die Veränderliche x, indem alles wie im Lehrsatz 3 bleibt, als ein unendlich Kleines der ersten Ordnung betrachten, und annehmen, daß das Verhältniß:

$$\frac{x f'(x)}{f(x)} \tag{33}$$

sich für $x = 0$ auf eine gewisse Constante reducire; so ist die reelle Function f(x) eine unendlich kleine Größe, deren Ordnungszahl im Allgemeinen jener Constante gleich ist.

Beweis. Es sei a die Ordnungszahl der unendlich kleinen Größe f(x), und wir wollen ferner

$$\frac{f(x)}{x^a} = \varphi(x) \text{ oder } f(x) = x^a \varphi(x) \tag{34}$$

setzen.

Da aus der Gleichung (34), wenn man die Logarithmen ihrer

beiden Theile differenzirt,

$$(35)\qquad \frac{x f'(x)}{f(x)} = a + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

folgt; so ist zum Beweise unseres Lehrsatzes nur nöthig, zu zeigen, daß der Werth des Verhältnisses:

$$(36)\qquad \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

im Allgemeinen Null ist für $x=0$, welches auf folgende Weise geschehen kann.

Da $f(x)$ eine unendlich kleine Größe der Ordnung a ist, so ist die Grenze des Verhältnisses:

$$(37)\qquad \frac{f(x)}{x^r} = x^{a-r}\varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{x^{r-a}},$$

für positive Werthe von $a-r$, Null, und für positive Werthe von $r-a$, unendlich. Bezeichnet man also mit ε eine beliebig kleine Zahl, so verschwinden die beiden Functionen:

$$(38)\qquad x^\varepsilon \varphi(x),\quad \frac{x^\varepsilon}{\varphi(x)}$$

zugleich mit der Veränderlichen x. Nun wollen wir annehmen, das Verhältniß (36) reducire sich für $x=0$ auf eine bestimmte Constante c. Wenn diese Constante nicht Null ist, und wenn überdies die Function $\varphi(x)$ von $x=0$ bis zu einem sehr nahe liegenden Werthe $x=X$ dasselbe Zeichen behält; so werden sich die abgeleiteten Functionen der Ausdrücke (38), nämlich:

$$(39)\qquad x^{\varepsilon-1}\varphi(x)\left\{\varepsilon + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right\},\quad \frac{x^{\varepsilon-1}}{\varphi(x)}\left\{\varepsilon - \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right\}$$

für sehr kleine Zahlenwerthe von x und von ε, auf Größen reduciren, welche stets dasselbe Zeichen haben, als die Producte:

$$c x^{\varepsilon-1}\varphi(x),\quad \frac{-c x^{\varepsilon-1}}{\varphi(x)}.$$

Nun sei die Größe X der Null hinreichend genähert, damit die Functionen 38 und 39, wovon die beiden letzten für $x=0$ unendlich werden, zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=X$ endlich und continuirlich bleiben; so existirt zwischen diesen Grenzen (siehe Vorl. 4. Lehrs. 2, Zusatz 1.) ein Werth für x, für welchen das Verhältniß der Ausdrücke (39), d. h. das Product:

$$\frac{\varepsilon + \dfrac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{\varepsilon - \dfrac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}}\,[\varphi(x)]^2$$

dem Verhältnisse der Größen:

$$X^{\varepsilon}\varphi(X),\ \frac{X^{\varepsilon}}{\varphi(X)},$$

oder dem Ausdrucke:

$$[\varphi(X)]^2$$

gleich ist.

Man kann also den Größen X und x sehr kleine Zahlenwerthe beilegen, durch welche der Gleichung:

$$(40)\qquad \frac{\varepsilon+\dfrac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{\varepsilon-\dfrac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}}=\left\{\frac{\varphi(X)}{\varphi(x)}\right\}^2$$

Genüge geschieht.

Hieraus folgt, wenn man X gegen die Grenze Null convergiren läßt:

$$\frac{\varepsilon+c}{\varepsilon-c}=\lim\left\{\frac{\varphi(X)}{\varphi(x)}\right\}^2>0.$$

Nun kann aber diese letzte Bedingung nicht erfüllt werden, wie klein ε auch immer sein mag, so lange die Constante c von Null verschieden angenommen wird. Folglich muß diese Constante oder die Grenze des Verhältnisses (36), weil ε unbestimmt abnehmen kann, nothwendig Null sein. Mithin folgt aus der Gleichung (35) allgemein:

$$(41)\qquad \lim\frac{xf'(x)}{f(x)}=a;$$

folglich ist der aufgestellte Lehrsatz bewiesen.

Zusatz 1. Der Lehrsatz 6 kann leicht in Beziehung auf die Functionen:

$$x^a,\ x^a e^x,\ x^a e^{-x}\ \text{etc}\ldots,$$

welche alle von der Ordnung a sind, verificirt werden. Dieser Lehrsatz findet selbst in dem Falle statt, wo die Function f(x) nur dann reell oder unendlich klein ist, wenn man der Veränderlichen x Werthe von einem gewissen Zeichen beilegt; wie solches z. B. der Fall ist, wenn man für f(x) eine der Functionen:

$$\frac{1}{l(x)},\ x^{\frac{1}{2}},\ x^a l(x),\ \frac{x^a}{l(x)},\ x^a l[l(x)],\ e^{-\frac{1}{x}},\ xe^{-\frac{1}{x}}\ \text{etc}\ldots$$

setzt, wovon die erste von der Ordnung 0, die zweite von der Ordnung $\frac{1}{2}$, die dritte, vierte und fünfte von der Ordnung a und die beiden letzten von der Ordnung ∞ sind, etc.

Zusatz 2. Wenn die reelle Function f(x) ein unendlich Kleines der Ordnung a ist, und der Zahlenwerth, so wie das Zeichen

des Verhältnisses:

$$\frac{f(x)}{x^a} = \varphi(x) \quad (34)$$

unbestimmt werden für $x = 0$; so kann man X nicht mehr so wählen, daß dieses Verhältniß zwischen den Grenzen $x = 0$, $x = X$ das Zeichen nicht ändert, und der Ausdruck:

$$\frac{x f'(x)}{f(x)} \quad (33)$$

wird sich nicht mehr nothwendig auf die Zahl a reduciren für $x = 0$. Setzt man z. B.

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad (42)$$

so ist:

$$a = 1 \quad (43) \qquad \frac{x f'(x)}{f(x)} = 1 - \frac{1}{x} \cot \frac{1}{x}. \quad (44)$$

Läßt man nun x gegen die Grenze Null convergiren, so convergirt der zweite Theil der Gleichung (44) gegen eine unendliche Menge verschiedener Grenzen, und nicht bloß gegen die Grenze 1.

Wenn die Function $f(x)$ imaginär wird, so kann es geschehen, daß keiner der Werthe des Ausdrucks (33), welche $x = 0$ entsprechen, sich auf die Constante a reducirt. Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir

$$f(x) = x^a \left\{ \cos \frac{1}{x} + \sqrt{-1} \sin \frac{1}{x} \right\} = x^a e^{\frac{1}{x}\sqrt{-1}} \quad (45)$$

setzen; so ist $f(x)$ ein unendlich Kleines der Ordnung a, und

$$\frac{x f'(x)}{f(x)} = a - \frac{1}{x} \sqrt{-1}, \quad (46)$$

welcher Ausdruck offenbar für $x = 0$ unendlich wird.

Die unendlich kleinen Größen von ganzen Ordnungszahlen bieten einige bemerkenswerthe Eigenschaften dar, welche sich unmittelbar aus der Formel (12) ableiten lassen, und in folgenden Sätzen liegen.

Lehrsatz 7. *Es sei $f(i)$ eine unendlich kleine Größe aus dem Systeme, dessen Basis i ist, und $f^{(n)}(0)$ das erste Glied der Reihe (11), welches nicht verschwindet. Ueberdies wollen wir annehmen, daß dieses Glied einen bestimmten, von Null verschiedenen Werth bekomme; so wird das Verhältniß:*

$$\frac{f(i)}{i^n},$$

für sehr kleine Zahlenwerthe von i dasselbe Zeichen haben, als $f^{(n)}(0)$.

Lehrsatz 8. Wenn sich alles wie im Lehrsatz 7 verhält, und n eine gerade Zahl ist; so hat $f(i)$ für sehr kleine numerische Werthe von i beständig dasselbe Zeichen als $f^{(n)}(0)$.

Beispiel. Setzt man:

$$f(i) = e^i - 2\cos i + e^{-i},$$

so findet man:

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = 4.$$

Man hat also in dem gegenwärtigen Falle:

$$n = 2,\ f^{(n)}(0) = f''(0) > 0.$$

Folglich ist die Function:

$$e^i - 2\cos i + e^{-i}$$

nach dem 8ten Lehrsatze für sehr kleine Zahlenwerthe von i stets positiv.

Lehrsatz 9. Wenn sich alles wie im Lehrsatz 7 verhält, und n eine ungerade Zahl ist, so ändert $f(i)$ das Zeichen, indem sie mit i durch Null geht. Alsdann haben $f(i)$ und i einerlei Zeichen, wenn $f^{(n)}(0)$ positiv ist, und entgegengesetzte Zeichen, wenn $f^{(n)}(0)$ negativ ist.

Beispiel. Setzt man:

$$f(i) = e^i - 2\cos i - e^{-i},$$

so findet man:

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = 4.$$

In diesem Falle ist also:

$$n = 3,\ f^{(n)}(0) = f'''(0) > 1.$$

Folglich hat nach dem 9ten Lehrsatze die Function $e^i - 2\cos i - e^{-i}$ für sehr kleine Zahlenwerthe von i dasselbe Zeichen, als diese Veränderliche.

Siebente Vorlesung.

Ueber die Maxima und Minima der reellen Functionen mit einer veränderlichen Größe.

Wenn ein besonderer Werth der Function $f(x)$ reell ist, und alle benachbarten reellen Werthe, d. h. alle Werthe, welche man erhielte, wenn man x um eine sehr kleine Größe wachsen oder abnehmen ließe, übertrifft; so wird dieser besondere Werth der Function ein **Maximum** genannt.

Wenn ein besonderer Werth der Function $f(x)$ reell und kleiner als alle benachbarten reellen Werthe ist, so heißt er ein **Minimum**.

Nun folgt aber offenbar aus dem, was in der vierten Vorlesung gesagt ist (Lehrsatz 1, Zusatz 1), daß, wenn die beiden Functionen $f(x)$, $f'(x)$ in der Nähe eines der Veränderlichen x beigelegten besondern Werthes stetig sind, dieser Werth nur dann $f(x)$ zum **Maximum** oder **Minimum** machen kann, wenn $f'(x)$ für denselben verschwindet. Von dieser Bemerkung ausgehend, läßt sich leicht folgende Aufgabe lösen.

Aufgabe. Die Maxima und Minima einer reellen Function der einzigen Veränderlichen x zu finden.

Es sei $f(x)$ die gegebene Function. Man suche zuerst die Werthe von x, für welche die Function aufhört, stetig zu sein; so wird jedem dieser Werthe, wenn es solche gibt, ein Werth der Function entsprechen, welcher im Allgemeinen, entweder eine **unendliche Größe**, ein **Maximum**, oder ein **Minimum** sein wird.

Dann suche man die Wurzeln der Gleichung:

$$(1) \qquad f'(x)=0$$

nebst den Werthen von x, welche die Function $f'(x)$ discontinuirlich machen, wozu besonders die zu rechnen sind, welche sich aus der Gleichung:

$$(2) \qquad f'(x)=\pm\infty, \text{ oder } \frac{1}{f'(x)}=0$$

ergeben.

Es sei $x=x_0$ einer dieser Werthe, so ist der correspondirende

Lehrsatz 8. Wenn sich alles wie im Lehrsatz 7 verhält, und n eine gerade Zahl ist; so hat $f(i)$ für sehr kleine numerische Werthe von i beständig dasselbe Zeichen als $f^{(n)}(0)$.

Beispiel. Setzt man:

$$f(i) = e^i - 2\cos i + e^{-i},$$

so findet man:

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = 4.$$

Man hat also in dem gegenwärtigen Falle:

$$n = 2,\ f^{(n)}(0) = f''(0) > 0.$$

Folglich ist die Function:

$$e^i - 2\cos i + e^{-i}$$

nach dem 8ten Lehrsatze für sehr kleine Zahlenwerthe von i stets positiv.

Lehrsatz 9. Wenn sich alles wie im Lehrsatz 7 verhält, und n eine ungerade Zahl ist, so ändert $f(i)$ das Zeichen, indem sie mit i durch Null geht. Alsdann haben $f(i)$ und i einerlei Zeichen, wenn $f^{(n)}(0)$ positiv ist, und entgegengesetzte Zeichen, wenn $f^{(n)}(0)$ negativ ist.

Beispiel. Setzt man:

$$f(i) = e^i - 2\cos i - e^{-i},$$

so findet man:

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = 4.$$

In diesem Falle ist also:

$$n = 3,\ f^{(n)}(0) = f'''(0) > 1.$$

Folglich hat nach dem 9ten Lehrsatze die Function $e^i - 2\cos$ [illegible] $- e^{-i}$ für sehr kleine Zahlenwerthe von i dasselbe Zeichen, als diese Veränderliche.

Siebente Vorle[illegible]

Ueber die Maxima und Minima der reellen [illegible] einer veränderlichen [illegible]

Wenn ein besonderer Werth der [illegible]
alle benachbarten reellen Werthe [illegible]
[illegible]hielte, wenn man x um eine [illegible]
[illegible]hmen ließe, übertrifft [illegible]
[illegible]tion ein Maximum genannt.
Wenn ein besonderer Werth [illegible]
[illegible] als alle benachbarten reellen [illegible]
[illegible]imum.

Nun folgt [illegible]
[illegible]g gesagt ist [illegible]
[illegible]nen $f(x)$ [illegible]
[illegible]gten besondern Werthe [illegible]
[illegible] Maximum oder [illegible]
[illegible]selben [illegible]
[illegible]leicht [illegible]

Aufgabe [illegible]
[illegible]ction [illegible]
Es sei [illegible]
[illegible]
[illegible] jedem [illegible]
[illegible]
[illegible]che [illegible]

[illegible] oder
[illegible] wird;
[illegible] $= a$ den

[illegible]
[illegible]

[illegible]den, welche die Ma-
[illegible]geben, ohne diese Fun-
[illegible]scontinuirlich zu machen,

[illegible] $x =$ [illegible]

Werth von $f(x)$, d. h. $f(x_0)$ ein Maximum, wenn die abgeleitete Function $f'(x)$ in der Nähe von $x = x_0$ positiv ist für $x < x_0$ und negativ für $x > x_0$. Im Gegentheil ist $f(x_0)$ ein Minimum, wenn die abgeleitete Function $f'(x)$ für $x < x_0$ negativ und für $x > x_0$ positiv ist. Wenn endlich die abgeleitete Function $f'(x)$ in der Nähe von $x = x_0$ beständig positiv, oder beständig negativ wäre; so würde $f'(x_0)$ weder ein Maximum noch ein Minimum sein.

Beispiele. Die drei Functionen:

$$(3) \qquad x^{1/2},\ \frac{1}{l(x)},\ x\,l(x),$$

welche discontinuirlich werden, indem sie vom Reellen zum Imaginären übergehen, während die Veränderliche x abnimm tund durch Null geht, erhalten für $x = 0$ den Werth Null, der ein Minimum der ersten und ein Maximum jeder der beiden andern ist.

Die beiden Functionen:

$$(4) \qquad x^2,\ x^{2/3},$$

deren abgeleitete:

$$(5) \qquad 2x,\ \frac{2}{3x^{1/3}}$$

vom Negativen zum Positiven übergehen, wenn sie sich auf Null oder das Unendliche reduciren, während die Veränderliche x verschwindet, indem sie vom Positiven zum Negativen übergeht, haben beide den Werth Null zum Minimum. Dagegen haben die zwei Functionen:

$$(6) \qquad x^3,\ x^{1/3},$$

deren abgeleitete:

$$(7) \qquad 3x^2,\ \frac{1}{3x^{2/3}}$$

auch für $x = 0$ Null oder unendlich werden, aber für jeden Werth von x positiv bleiben, weder ein Maximum noch ein Minimum.

Die Function:

$$(8) \qquad x^2 + px + q$$

bleibt, so wie ihre abgeleitete Function, für alle Werthe von x continuirlich; aber diese abgeleitete Function:

$$(9) \qquad 2x + p$$

verschwindet für $x = -\frac{1}{2}p$, wird negetiv für $x < -\frac{1}{2}p$ und positiv für $x > -\frac{1}{2}p$. Folglich wird die Function (8) für $x = -\frac{1}{2}p$ ein Minimum, welches gleich

$$(10) \qquad q - \tfrac{1}{4}p^2$$

ist, und welches sich leicht nachweisen läßt, wenn man erwägt, daß diese Function auf die Form:

$$(11) \qquad (x + \tfrac{1}{2}p)^2 + q - \tfrac{1}{4}p^2$$

gebracht werden kann, und für jeden von $-\frac{1}{2}p$ verschiedenen Werth von x größer ist als $q - \frac{1}{4}p^2$.

Bezeichnen wir nun durch A eine größere Zahl als die Einheit, und durch L(x) den Logarithmus von x aus dem Systeme, dessen Basis A ist. Die abgeleitete Function von

$$(12) \qquad \frac{A^x}{x}$$

ist:

$$(13) \qquad \frac{A^x}{x}\left\{\frac{1}{L(e)} - \frac{1}{x}\right\},$$

und da diese abgeleitete Function für einen größern Werth von x als Null, negativ, Null oder positiv ist, jenachdem $x < L(e)$, $x = L(e)$ oder $x > L(e)$ ist; so folgt, daß die Function (12) für $x = L(e)$ den kleinsten Werth:

$$(14) \qquad \frac{e}{L(e)}$$

bekommt.

Die Function:

$$(15) \qquad \frac{L(x)}{x},$$

deren abgeleitete:

$$(16) \qquad \frac{1}{x^2}[L(e) - L(x)]$$

für jeden größern Werth von x als Null, positiv, Null oder negativ ist, jenachdem man $x < e$, $x = e$, $x > e$ setzt, bekommt für $x = e$ den größten Werth:

$$(17) \qquad \frac{L(e)}{e}.$$

Da endlich die abgeleitete Function von:

$$(18) \qquad x^a e^{-x},$$

nämlich:

$$(19) \qquad x^a e^{-x}\left(\frac{a}{x} - 1\right)$$

für einen größern Werth von x, als Null, positiv, Null oder negativ ist, jenachdem $x < a$, $x = a$ oder $x > a$ gesagt wird; so kann man behaupten, daß die Function (18) für $x = a$ den größten Werth:

$$(20) \qquad a^a e^{-a}$$

erhält.

Wenn man, um die Werthe von x zu finden, welche die Maxima oder Minima der Function $f(x)$ geben, ohne diese Function oder ihre abgeleitete Function $f'(x)$ discontinuirlich zu machen,

die reellen Wurzeln der Gleichung (1) bestimmt hat; so ist es gewöhnlich hinreichend, um zu entscheiden, ob jede dieser Wurzeln $f(x)$ zum Maximum oder Minimum macht, die abgeleitete Function der zweiten Ordnung zu betrachten. Denn es sei x_0 eine dieser Wurzeln, und wir wollen annehmen, daß sich der correspondirende Werth von $f''(x)$ auf eine endliche Größe reducire. Der Wurzel $x = x_0$ wird ein Minimum von $f(x)$ entsprechen, wenn die Function $f'(x)$, welche für $x = x_0$ Null wird, vom Negativen zum Positiven übergeht; d. h. mit andern Worten, wenn die Function $f'(x)$ mit der Veränderlichen x wächst. Nun wird aber diese letzte Bedingung erfüllt (Vorles. 4, Lehrs. 1.), wenn die abgeleitete Function von $f'(x)$, d. h. $f''(x)$ für sehr wenig von x_0 verschiedene Werthe von x stets positiv oder Null ist, folglich wenn die Größe $f''(x_0)$ einen endlichen positiven Werth, oder einen Werth $= 0$, der aber ein Minimum von $f''(x)$ ist, gibt. Im Gegentheil ist $f(x_0)$ ein Maximum von $f(x)$, wenn, indem $f'(x_0) = 0$ ist, $f'(x)$ für wachsende Werthe von x abnimmt in der Nähe des besondern Werthes $x = x_0$, welches (nach dem angeführten Lehrsatze) statt findet, wenn $f''(x_0)$ einen endlichen und negativen Werth, oder einen Werth $= 0$, der aber ein Maximum von $f''(x_0)$ ausdrückt, hat. Man kann also folgende Sätze aussprechen:

Lehrsatz 1. Damit ein Werth von x, welcher der Gleichung:

$$f'(x) = 0 \tag{1}$$

Genüge leistet, ein Minimum der Function $f(x)$ zur Folge habe, ist es nöthig, aber auch hinreichend, daß, wenn der correspondirende Werth von $f''(x)$ eine endliche und bestimmte Größe ist, diese Größe positiv sei, oder daß, wenn sie $= 0$ ist, sie ein Minimum von $f''(x)$ ausdrückt.

Beispiel. Setzt man:

$$f(x) = \frac{A^x}{x},$$

so findet man:

$$f'(x) = \frac{A^x}{x}\left\{\frac{1}{L(e)} - \frac{1}{x}\right\} = \left\{\frac{1}{L(e)} - \frac{1}{x}\right\} f(x),$$

$$f''(x) = \left\{\frac{1}{L(e)} - \frac{1}{x}\right\} f'(x) + \frac{1}{x^2} f(x),$$

$$= \left\{\frac{1}{L(e)} - \frac{1}{x}\right\}^2 f(x) + \frac{1}{x^2} f(x).$$

Folglich reducirt der Werth $x = L(e)$, für welchen $f'(x)$ verschwindet, die abgeleitete Function $f''(x)$ auf die positive Größe:

$$\frac{1}{x^2} f(x) = \frac{A^x}{x^3} = \frac{e}{[L(e)]^3},$$

und macht die gegebene Function $\frac{A^x}{x}$ zum Minimum.

Ferner sei:

$$f(x) = e^x - 2\cos x + e^{-x},$$

so ist:

$$f'(x) = e^x + 2\sin x - e^{-x},$$

und:

$$f''(x) = e^x + 2\cos x + e^{-x}.$$

Folglich reducirt der Werth $x = 0$, für welchen $f(x)$ und $f'(x)$ verschwinden, die abgeleitete Function $f''(x)$ auf die positive Größe $1 + 2 + 1 = 4$; und folglich ist Null der kleinste Werth der gegebenen Function.

Lehrsatz 2. Damit ein Werth von x, welcher der eichung (1) Genüge leistet, die Function $f(x)$ zum aximum mache, ist es nöthig und auch zureichend, ß, wenn der Werth von $f''(x)$ eine endliche und bemmte Größe ist, diese Größe negativ ist, oder daß, nn sie Null ist, sie ein Maximum von $f''(x)$ ausickt.

Beispiel. Setzt man:

$$f(x) = x^a e^{-x},$$

indet man:

$$f'(x) = x^a e^{-x}\left\{\frac{a}{x} - 1\right\} = \left\{\frac{a}{x} - 1\right\} f(x),$$

$$f''(x) = \left\{\frac{a}{x} - 1\right\} f'(x) - \frac{a}{x^2} f(x)$$

$$= \left\{\frac{a}{x} - 1\right\}^2 f(x) - \frac{a}{x^2} f(x).$$

Folglich reducirt der Werth $x = a$, für welchen $f'(x)$ verschwindet, $f''(x)$ auf die negative Größe:

$$-\frac{a}{x^2} f(x) = -a x^{a-2} e^{-x} = -a^{a-1} e^{-a},$$

und macht folglich die gegebene Function $x^a e^{-x}$ zum Maximum.

Wir wollen nun annehmen, daß für einen Werth x_0 von x, welcher der Gleichung (1) genügt, ohne die Function $f(x)$ discontinuirlich zu machen, mehrere der abgeleiteten Functionen:

$$(21) \qquad f'(x), f''(x), f'''(x) \ldots.$$

verschwinden. Durch $f^{(n)}(x)$ wollen wir die erste von ihnen bezeichnen, welche nicht verschwindet, und setzen, daß $f^{(n)}(x_0)$ eine endliche und bestimmte Größe sei. Damit $f(x_0)$ ein Minimum oder Maximum von $f(x)$ sei, muß nothwendig (nach Lehrsatz 1 und 2) $f''(x_0) = 0$ ein Minimum oder Maximum von $f''(x)$

sein. Folglich muß sich die erste der Größen:

$$(22) \qquad f'''(x_0),\ f^{IV}(x_0)$$

auf Null, und die zweite auf eine positive oder negative, oder auf Null, welche aber ein M i n i m u m oder M a x i m u m von $f'^{V}(x)$ ist, reduciren. In den beiden ersten Fällen ist $n=4$. Im dritten Falle folgt aus dem Lehrs. 1 und 3 wieder, daß die erste der beiden Größen:

$$(23) \qquad f^{V}(x_0) f^{VI}(x_0)$$

sich auf Null, die zweite auf eine positive oder negative, oder vielmehr auf Null, welche aber ein M i n i m u m oder M a x i m u m von $f^{V\prime}(x)$ ausdrückt, reduciren muß. Wenn die zweite der Größen (23) von Null verschieden ist, so hat man offenbar $n=6$. Fährt man auf dieselbr Weise fort, so wird man zuletzt finden: 1) daß, wenn der Werth $x=x_0$, $f(x)$ zum M i n i m u m macht, n eine g e r a d e Zahl und $f^{(n)}(x_0)$ eine p o s i t i v e Größe sein wird; 2) daß, wenn der Werth $x=x_0$ dieselbe Function zum M a x i m u m macht, n wieder eine g e r a d e Zahl und $f^{(n)}(x_0)$ eine n e g a t i v e Größe ist. Mann kann folglich mit den Lehrsätzen 1 und 2 den folgenden verbinden.

Lehrsatz 3. Wenn für einen besondern Werth von x, in dessen Nähe die Function $f(x)$ stetig bleibt, die abgeleiteten Functionen derselben von einer niedrigern Ordnung als n verschwinden, und die abgeleitete Function von der Ordnung n sich auf eine endliche und bestimmte Größe reducirt; so kann der correspondirende Werth von $f(x)$ nur in dem Falle ein Maximum oder Minimum sein, wo n eine paare Zahl bezeichnet. In diesem Falle wird $f(x)$ ein Minimum, wenn der Werth von $f^{(n)}(x)$ positiv ist, und ein Maximum, wenn der Werth von $f^{(n)}(x)$ negativ ist.

B e i s p i e l. Setzt man:

$$f(x)=e^{x}+2\cos x+e^{-x},$$

so findet man:

$$f'(x)=e^{x}-2\sin x-e^{-x},$$

$$f''(x)=e^{x}-2\cos x+e^{-x},$$

$$f'''(x)=e^{x}+2\sin x-e^{-x},$$

$$f^{IV}(x)=e^{x}+2\cos x+e^{-x}=f(x).$$

Folglich reducirt der Werth $x=0$, für welchen die abgeleiteten Functionen:

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x)$$

verschwinden, $f^{IV}(x)$ auf die positive Größe $1+2+1=4$, und daher ist der correspondirende Werth der gegebenen Function $f(x)$, oder die Zahl 4 ein M i n i m u m derselben.

Der Lehrsatz 3 könnte auch direct aus der Formel (19) der vierten Vorles. abgeleitet werden. Denn damit ein besonderer Werth $f(x_0)$ von $f(x)$ ein Minimum sei, ist erforderlich und genügend, daß er von allen benachbarten Werthen übertroffen werde, welche allgemein von der Form $f(x_0+i)$ sind, indem i eine unendlich kleine Größe bezeichnet; d. h. mit andern Worten, daß die Differenz:

$$(24)\qquad f(x+i)-f(x_0),$$

wenn sie reell ist, für sehr kleine Zahlenwerthe, und irgend welches Zeichen von i positiv bleibe. Desgleichen, damit $f(x_0)$ ein Maximum von $f(x)$ sei, ist es erforderlich und genügend, daß die Differenz (24) reell und für sehr nahe an Null liegende Werthe von i stets negativ sei. Wenn nun, indem $f(x)$ eine in der Nähe des besondern Werthes $x=x_0$ stetige Function ist, die abgeleiteten Functionen von $f(x)$ von niedrigern Ordnungen als n sich auf Null, und $f^{(n)}(x)$ auf eine endliche und bestimmte Größe reduciren; so hat man (nach der Formel 19 der 4ten Vorlesung), wenn man der Größe i sehr kleine Zahlenwerthe beilegt, und durch θ eine kleinere Zahl als die Einheit bezeichnet:

$$(25)\qquad f(x_0+i)-f(x_0)=\frac{i^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x_0+\theta i).$$

Nun folgt aber offenbar aus dieser Gleichung, daß die Differenz (24) für sehr kleine numerische Werthe von i dasselbe Zeichen hat, als das Product:

$$(26)\qquad i^n f^{(n)}(x_0).$$

Diese Differenz verändert folglich das Zeichen, wenn n eine ungerade Zahl ist, und die Größe $f(x_0)$ kann weder ein Maximum noch ein Minimum von $f(x)$ sein. Ist im Gegentheil n eine gerade Zahl, so bleibt die Differenz (24), indem sie sich der Null nähert, wie das Product (26), für jedes Zeichen von i stets positiv oder stets negativ, jenachdem der zweite Factor $f^{(n)}(x_0)$ dieses Productes selbst positiv oder negativ ist. Es ist also $f(x_0)$ ein Maximum oder Minimum von $f(x)$, jenachdem $f^{(n)}(x_0)$ negativ oder positiv ist. Es verdient bemerkt zu werden, daß man den Lehrsatz 3 auch aus den Formeln 7, 8, 9, Vorles. 6, ableiten könnte, wenn man daselbst für die unendlich kleine Größe $f(i)$ die unendlich kleine Größe $f(x_0+i)-f(x_0)$ setzte.

Zum Schlusse dieser Vorlesung bemerken wir noch, daß, wenn man $f(x)$ durch y bezeichnet, die verschiedenen Glieder der Reihe (21) die Form annehmen:

$$(27)\qquad \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3}\ \text{etc}\ldots,$$

und die Gleichung (1) verwandelt sich alsdann in:

$$(28)\qquad dy=0.$$

Ferner kann man offenbar behaupten: 1) daß, wenn

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$

das erste Glied der Reihe (21) bezeichnet, welches für $x = x_0$ einen von Null verschiedenen Werth bekommt, $d^n y$ das Glied ist, welche dieselbe Bedingung in der Reihe der Differenziale:

(29) $$dy,\ d^2y,\ d^3y,\ \text{etc} \ldots$$

erfüllt; 2) daß, wenn n eine gerade Zahl ist, das Differenzial:

$$d^2 y = f^{(n)}(x)\,dx^n$$

beständig dasselbe Zeichen hat, als die abgeleitete Function $f^{(n)}(x)$.

Hiernach leuchtet ein, daß man dem Lehrsatz 3 folgenden substituiren kann.

Lehrsatz 4. Es sei $f(x) = y$ eine gegebene Function von x. Um zu entscheiden, ob eine Wurzel der Gleichung (28) ein Maximum oder Minimum der gegebenen Function erzeugt, genügt es gewöhnlich, die dieser Wurzel entsprechenden Werthe von d^2y, d^3y, $d^4y \ldots$ zu berechnen. Wenn der Werth von d^2y positiv oder negativ ist, so ist der Werth von y im ersten Falle ein Minimum und im zweiten ein Maximum. Reducirt sich der Werth von d^2y auf Null, so muß man unter den Differenzialen d^3y, $d^4y \ldots$ das erste nicht verschwindende suchen, und es sei $d^n y$ dieses Differenzial. Ist dann n eine ungerade Zahl, so ist der Werth von y weder ein Maximum noch ein Minimum. Wenn im Gegentheil n eine gerade Zahl ist, so ist der Werh von y jedesmal ein Minimum, wenn $d^n y$ positiv ist, und ein Maximum, wenn $d^n y$ negativ ist.

Anmerkung. Für Lehrsatz 4 muß, wie im Lehrsatz 3, angenommen werden, daß die abgeleitete Function:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$

für $x = x_0$ nicht nur einen endlichen, sondern auch bestimmten Werth behalte, und daß folglich diese abgeleitete Function nebst den Functionen:

$$y',\ y'',\ y''' \ldots y^{(n-1)}$$

in der Nähe des der Veränderlichen x beigelegten besondern Werthes x_0 stetig bleiben.

Achte Vorlesung.

Entwickelung einer reellen Function von x nach den steigenden und ganzen Potenzen der Veränderlichen x oder der Differenz x — a, in welcher a einen besondern Werth dieser Veränderlichen bezeichnet.

Wenn die Function $f(x)$ und ihre abgeleiteten Functionen bis zur n^{ten} Ordnung von $x=0$ bis $x=h$ reell und continuirlich sind, und das Verhältniß:

$$(1) \qquad \frac{f(x)}{x^{n-1}}$$

mit der Veränderlichen x zu gleicher Zeit verschwindet; so kann man nach dem, was in der 6ten Vorlesung gezeigt worden, indem man diese Veränderliche zwischen den Grenzen 0 und h annimmt, eine Zahl θ finden, welche kleiner ist als die Einheit, und der Gleichung:

$$(2) \qquad f(x)=\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(\theta x)$$

Genüge leistet.

Dieser Satz gibt, wie sogleich gezeigt werden soll, ein sehr einfaches Mittel an die Hand, die reellen Functionen einer Veränderlichen x nach den steigenden und ganzen Potenzen dieser Veränderlichen zu entwickeln.

Es sei $f(x)$ eine reelle Function von x, welche nebst ihren abgeleiteten Functionen bis zur Ordnung n für $x=0$ einen endlichen Werth behält; und wir wollen überdies annehmen, daß die Functionen:

$$(3) \qquad f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots f^{(n)}(x)$$

von $x=0$ bis $x=h$ reell und stetig bleiben. Aus der Gleichung (2) findet man successive, wenn man 1)

$$f(x)=f(x)-f(0), \text{ und } n=1,$$

setzt:

$$(4)\qquad f(x)-f(0)=xf'(\theta x),$$

und wenn man setzt: $f'(\theta x)=f'(0)+P$

$$P=\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x}.$$

2) Setzt man: $\mathrm{f}(x)=f(x)-f(0)-xf'(0)$, und $n=2$, so findet man:

$$(5)\qquad f(x)-f(0)-xf'(0)=\frac{x^2}{1.2}f''(\theta x);$$

und wenn man setzt: $f''(\theta x)=f''(0)+Q$

$$\frac{1}{1.2}Q=\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)-\frac{x^2}{1.2}f''(0)}{x^2}.$$

3) Setzt man: $\mathrm{f}(x)=f(x)-f(0)-xf'(0)-\frac{x^2}{1.2}f''(0)$ und $n=3$, so ist:

$$(6)\qquad f(x)-f(0)-xf'(0)-\frac{x^2}{1.2}f''(0)=\frac{x^3}{1.2.3}f'''(\theta x),$$

und $f'''(\theta x)=f'''(0)+R$ gesetzt, gibt:

$$\frac{1}{1.2.3}R=\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)-\frac{x^2}{1.2}f''(0)-\frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)}{x^3}.$$

etc ...

Fährt man auf diese Weise fort, und bemerkt, daß die Functionen:

$$P,\ \frac{1}{1.2}Q,\ \frac{1}{1.2.3}R,\ \text{etc}\ldots$$

alle mit x verschwinden*; so erhält man die Gleichung:

$$(7)\qquad f(x)-f(0)-xf'(0)-\frac{x^2}{1.2}f''(0)-\frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)\ldots$$
$$-\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots n-1}f^{(n-1)}(0)=\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(\theta x),$$

oder:

$$(8)\qquad f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0)$$
$$+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(\theta x).$$

* from the rule by differentiation — also as the numerators are infinitesimals of a higher order than the [illegible]

Aus der Formel (8) folgt, daß die reelle Function $f(x)$ als aus einer ganzen Function von x, d. h. aus:

$$(9)\quad f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0),$$

und einem Reste, nämlich:

$$(10)\quad \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(\theta x),$$

bestehend, angesehen werden kann.

Setzt man in derselben Formel successive $n=1$, $n=2$, $n=3$, etc..., so erhält man die Gleichungen:

$$(11)\quad f(x)=f(0)+xf'(\theta x),$$

$$(12)\quad f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(\theta x),$$

$$(13)\quad f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(\theta x)$$

etc...,

welche mit den Formeln (4), (5), (6), etc. übereinstimmen.

Beispiele. Wenn durch μ eine constante Größe bezeichnet wird, und man für $f(x)$ successive die reellen Functionen:

$$e^x,\ \cos x,\ \sin x,$$
$$(1+x)^\mu,\ l(1+x)$$

setzt, wovon die drei ersten für jedes x, und die beiden letzten stetig sind, wenn $1+x$ positiv ist; so findet man in Beziehung auf diese Functionen für die Werthe von $f^{(n)}(x)$:

$$e^x,\ \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\ \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),$$

$$\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)(1+x)^{\mu-n},\ (-1)^{n-1}.\frac{1.2.3\ldots n-1}{(1+x)^n};$$

und für die correspondirenden Werthe von $f^{(n)}(0)$:

$$1,\ \cos\frac{n\pi}{2},\ \sin\frac{n\pi}{2},$$

$$\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1),\ (-1)^{n-1}1.2.3\ldots(n-1).$$

Folglich gibt die Formel (8) für irgend welche reelle Werthe von x:

$$(14)\quad e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}e^{\theta x};$$

$$(15)\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{x^{(n-1)}}{1.2.3\ldots(n-1)} \cos\frac{(n-1)\pi}{2}$$
$$+ \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\cos\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$(16)\ \sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} \sin\frac{(n-1)\pi}{2}$$
$$+ \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\sin\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right);$$

und für größere Werthe von x als -1:

$$17)\qquad (1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \ldots$$
$$+ \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}x^{n-1}$$
$$+ \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n}x^n(1+\theta x)^{\mu-n};$$

$$(18)\ l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \pm \frac{x^{n-1}}{n-1} \pm \frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n.$$

Nimmt man in den Formeln (15), (16) für n eine gerade Zahl, so verwandeln sie sich in:

$$(19)\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots \pm \frac{x^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)}$$
$$\mp \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\cos\theta x,$$

$$(20)\ \sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots \pm \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}$$
$$\mp \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\sin\theta x,$$

Ebenso findet man, wenn für n eine ungerade Zahl gesetzt wird:

$$(21)\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots \pm \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}$$
$$\mp \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\sin\theta x,$$

$$(22)\ \sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots \pm \frac{x^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)} \mp \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\cos\theta x.$$

Setzt man $n=1$, so folgt aus den vorhergehenden Formeln:

$$(23)\ \frac{e^x-1}{x} = e^{\theta x},\quad (24)\ \frac{1-\cos x}{x} = \sin\theta x,\quad (25)\ \frac{\sin x}{x} = \cos\theta x,$$

$$(26)\ \frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu x} = (1+\theta x)^{\mu-1},\quad (27)\ \frac{l(1+x)}{x} = \frac{1}{1+\theta x}.$$

Wenn man hingegen $n=2$ setzt, so ergibt sich:

$$(28)\qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2}e^{\theta x},$$

$$(29)\qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2}\cos\theta x,$$

$$(30)\qquad \sin x = x - \frac{x^2}{1.2}\sin\theta x,$$

$$(31)\qquad (1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2(1+\theta x)^{\mu-2},$$

$$(32)\qquad l(1+x) = x - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^2$$

etc...

Ferner wollen wir setzen:

$$f(x) = \text{arc. tang}\, x,$$

so ist:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1-x\sqrt{-1}} + \frac{1}{1+x\sqrt{-1}}\right\},$$

$$f^{(n)}(x) = (\sqrt{-1})^{n-1}\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{2}\left\{\left(\frac{1}{1-x\sqrt{-1}}\right)^n - \left(\frac{-1}{1+x\sqrt{-1}}\right)^n\right\},$$

$$f^{(n)}(0) = \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{2}[1-(-1)^n](\sqrt{-1})^{n-1},$$

und folglich:

$$f^{(n)}(0) = 0,\ \text{oder}\ f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,1.2.3\ldots(n-1),$$

jenachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Dieses vorausgesetzt, gibt die Formel (8) für beliebige reelle Werthe der Veränderlichen x, aber für eine paare Zahl n:

$$(33)\qquad \text{arc. tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \pm \frac{x^{n-1}}{(n-1)}$$
$$\mp \frac{x^n}{n} \frac{(1-\theta x\sqrt{-1})^{-n} - (1+\theta x\sqrt{-1})^{-n}}{2\sqrt{-1}},$$

und wenn n ungerade ist:

$$(34)\qquad \text{arc. tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \pm \frac{x^{n-1}}{(n-1)}$$
$$\mp \frac{x^n}{n} \frac{(1-\theta x\sqrt{-1})^{-n} + (1+\theta x\sqrt{-1})^{-n}}{2}.$$

Wenn $f(x)$ eine ganze Function des Grades n ist, so ist ihr Differenzial und folglich ihre abgeleitete Function der Ordnung n eine constante Größe (siehe Vorles. 3, S. 34). Man hat folglich alsdann:

$$(35)\qquad f^{(n)}(\theta x) = f^{(n)}(0),$$

und aus der Formel (8) ergibt sich:

$$(36)\quad f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(0)$$
$$+ \frac{x^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(0).$$

Dieser Schluß läßt sich leicht rechtfertigen, und die Gleichung (36) sich selbst in dem Falle direct ableiten, wo die Function $f(x)$ und die Veränderliche x aufhören, reell zu sein. Denn es sei:

$$(37)\qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

eine ganze Function vom Grade n, so findet man, wenn man die Gleichung (37) n mal nach einander differenzirt:

$$(38)\quad \begin{cases} f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}, \\ f''(x) = 1.2.a_2 + \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2}, \\ \quad \text{etc.}\ldots \\ f^{(n)}(x) = 1.2.3\ldots(n-1) n a_n. \end{cases}$$

Setzt man nun in diesen verschiedenen Formeln $x = 0$, so folgt daraus:

$$(39)\quad a_0 = f(0),\ a_1 = f'(0),\ a_2 = \frac{1}{1.2} f''(0),\ \ldots\ a_n = \frac{1}{1.2\ldots n} f^{(n)}(0).$$

Substituirt man dann die vorhergehenden Werthe von a_0, a_1,

$a_2 \ldots a_n$ in die Gleichung (37), so erhält man offenbar die Gleichung (36) wieder.

Beispiel. Es sei $f(x) = (1+x)^n$, so erhält man die bekannte Formel:

$$(40)\quad (1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x_3 + \ldots$$
$$+ \frac{n}{1}x^{n-1} + x^n.$$

Wir wollen nun annehmen, daß, indem a einen besondern Werth der Veränderlichen x bezeichnet, die ganze oder nicht ganze Function $f(x)$ nebst ihren abgeleiteten Functionen bis zur Ordnung n, für $x=a$ einen endlichen Werth behalten, und daß die Functionen (3) von $x=a$ bis $x=a+h$ reell und stetig bleiben. Setzt man alsdann:

$$(41)\qquad x = a + z \text{ und } (42)\quad F(z) = f(a+z),$$

so findet man:

$$F'(z) = f'(a+z),\ F''(z) = f''(a+z), \ldots F^{(n)}(z) = f^{(n)}(a+z),$$
$$F'(0) = f'(a),\ F''(0) = f''(a), \ldots F^{(n)}(0) = f^{(n)}(a);$$

und aus der Formel (8) folgt für Werthe von z zwischen 0 und h:

$$(43)\qquad F(z) = F(0) + \frac{z}{1}F'(0) + \frac{z^2}{1.2}F''(0) + \ldots$$
$$+ \frac{z^{n-1}}{1.2 \ldots (n-1)}F^{(n-1)}(0) + \frac{z^n}{1.2 \ldots n}F^{(n)}(\theta z),$$

oder was dasselbe ist:

$$(44)\quad f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1}f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{1.2.3 \ldots (n-1)}f^{(n-1)}(a)$$
$$+ \frac{(x-a)^n}{1.2 \ldots n}f^{(n)}[a + \theta(x-a)].$$

Folglich kann man in der gemachten Voraussetzung eine Zahl θ finden, welche kleiner ist, als die Einheit, und der Gleichung (44) genügt, so lange x zwischen den Grenzen $x=a$, $x=a+h$ liegt. Derselben Formel zufolge kann die Function $f(x)$ als aus der ganzen Function:

$$(45)\qquad f(a) + \frac{x-a}{1}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a) + \ldots$$
$$+ \frac{(x-a)^{n-1}}{1.2.3 \ldots (n-1)}f^{(n-1)}(a),$$

welche nach den steigenden Potenzen von $(x-a)$ fortschreitet, und

aus einem durch das Product:

$$(46)\qquad \frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}[a+\theta(x-a)]$$

ausgedrückten Reste bestehend angesehen werden.

Setzt man in der Formel (44) successive $n=1$, $n=2$ etc., so erhält man die Gleichungen:

$$(47)\qquad f(x)=f(a)+(x-a)f'[a+\theta(x-a)],$$

$$(48)\qquad f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''[a+\theta(x-a)],$$

$$(49)\qquad f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a) + \frac{(x-a)}{1.2.3}f'''[a+\theta(x-a)],$$

etc...

Beispiele. Sei μ eine constante Größe, und es werde für $f(x)$ successive eine der beiden Functionen gesetzt:

$$x^\mu,\ l(x),$$

welche mit ihren abgeleiteten der verschiedenen Ordnungen continuirlich bleiben, so lange man der Veränderlichen x einen positiven und endlichen Werth beilegt. In Beziehung auf diese Functionen findet man für die allgemeinen Werthe von $f^{(n)}(0)$:

$$\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)x^{\mu-n},\quad (-1)^{n-1}.\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{x^n}.$$

Mithin gibt die Formel (44) für positive Werthe der Veränderlichen x:

$$(50)\quad \left\{\begin{array}{l} x^\mu = a^\mu + \mu a^{\mu-1}(x-a) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}a^{\mu-2}(x-a)^2 + \ldots \\ + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}a^{\mu-n+1}(x-a)^{n-1} \\ + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}(x-a)^n[a+\theta(x-a)] \end{array}\right.$$

und:

$$(51)\quad \left\{\begin{array}{l} l\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{x-a}{a}-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{a}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{a}\right)^3-\ldots \\ \pm\frac{1}{n-1}\left(\frac{x-a}{a}\right)^{n-1}\mp\frac{1}{n}\left(\frac{x-a}{a+\theta(x-a)}\right)^n. \end{array}\right.$$

Dieselben Formeln würde man erhalten, wenn man in den Formeln (17) und (18) für x die Differenz $\frac{x}{a}-1$ setzte.

Setzt man $n=1$, so folgt aus den Formeln (50) und (51):

$$x^{\mu}=a^{\mu}+\mu(x-a)[a+\theta(x-a)]^{\mu-1}, \tag{52}$$

$$l\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{x-a}{a+\theta(x-a)}, \tag{53}$$

etc...

Oft ist es zweckmäßig, den Ausdrücken (10) und (46) andere zu substituiren, welches auf folgende Weise geschehen kann.

Wir wollen annehmen, daß man in der Gleichung (44) die Größe x als constant betrachte, die Größe a hingegen als veränderlich, und durch $\varphi(a)$ den Ausdruck (46), als Function von a betrachtet, bezeichnen, so daß:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\ldots \\ +\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)+\varphi(a) \tag{54}$$

ist.

Aus der Formel (47) folgt, wenn man φ für f setzt:

$$\varphi(a)=\varphi(x)-(x-a)\varphi'[a+\theta(x-a)]. \tag{55}$$

Ueberdies folgt aus der Gleichung (54) offenbar:

$$\varphi(x)=0, \tag{56}$$

und wenn man dieselbe Gleichung nach a differenzirt:

$$\varphi'(a)=-\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(a); \tag{57}$$

folglich auch:

$$\varphi'[a+\theta(x-a)]=-\frac{(1-\theta)^{n-1}(x-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}[a+\theta(x-a)]. \tag{58}$$

Hiernach gibt die Formel (55):

$$\varphi(a)=\frac{(1-\theta)^{n-1}(x-a)^{n}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}[a+\theta(x-a)]. \tag{59}$$

Man kann also den Ausdruck (59) für den Ausdruck (46) setzen. Nur ist zu bemerken, daß die Zahl θ bei dem Uebergange von dem einen zum andern ihren Werth ändern kann, aber immer zwischen den Grenzen 0, 1 bleibt.

Mit Bezugnahme auf die Gleichung (59) verwandelt sich die Formel (44) in:

$$(60)\begin{cases} f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\ldots \\ \quad +\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a) \\ \quad +\frac{(1-\theta)^{n-1}(x-a)^n}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}[a+\theta(x-a)]. \end{cases}$$

Setzt man in dieser Gleichung $a=0$, so hat man bloß:

$$(61)\begin{cases} f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0) \\ \quad +\frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(\theta x). \end{cases}$$

Aus der Gleichung (61) folgt, daß man für den Ausdruck (10) in der Formel (8)

$$(62)\qquad \frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(\theta x)$$

setzen kann; nur kann die Zahl θ bei dem Uebergange von dem einen Ausdrucke zum andern den Werth ändern, liegt aber immer zwischen den Grenzen 0 und 1.

Wenn man in den Formeln (60) und (61) $n=1$ setzt, so muß man zu gleicher Zeit für das Product $1.2.3\ldots(n-1)$ die Einheit setzen. Man wird also dann die Formeln (11) und (47) wieder erhalten. Setzt man aber $n=2$, $n=3$, etc..., so findet man:

$$(63)\ f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+(1-\theta)(x-a)^2f''[a+\theta(x-a)],$$

$$(64)\begin{cases} f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a) \\ \quad +\frac{(1-\theta)^2(x-a)^3}{1.2}f'''[a+\theta(x-a)]. \end{cases}$$

etc...

$$(65)\qquad f(x)=f(0)+xf'(0)+(1-\theta)x^2f''(\theta x),$$

$$(66)\ f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{(1-\theta)^2x^3}{1.2}f'''(\theta x),$$

etc...

Beispiele. Nimmt man für $f(x)$ die beiden Functionen:

$$(1+x)^\mu,\ l(1+x),$$

so folgt aus der Gleichung (61) für $x>-1$,

$$
(67)\quad \left\{\begin{aligned}
(1+x)^\mu &= 1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\ldots \\
&+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-1)\ldots(\mu-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}x^{n-1} \\
&+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)}(1-\theta)^{n-1}x^n(1+\theta x)^{\mu-n}
\end{aligned}\right.
$$

$$
(68)\quad l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\pm\frac{x^{n-1}}{n-1}\pm(1-\theta)^{n-1}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n.
$$

Setzt man $n=2$, so ergibt sich:

$$
(69)\quad (1+x)^\mu=1+\mu x+\mu(\mu-1)x^2(1-\theta)(1+\theta x)^{n-2}
$$

$$
(70)\quad l(1+x)=x-(1-\theta)\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^2.
$$

Neunte Vorlesung.

Maclaurinscher und Taylorscher Lehrsatz.

Wenn einer der Ausdrücke:

$$(1)\quad \frac{x^n}{1.2.3..n} f^{(n)}(\theta x), \quad (2)\quad \frac{x^n}{1.2.3...(n-1)}(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta x)$$

für Werthe von x, die zwischen gewissen Grenzen liegen, und für $\theta < 1$ unbestimmt abnimmt, während n wächst; so findet man, wenn in den Gleichungen (8) und (61) der 8ten Vorlesung $n = \infty$ gesetzt wird:

$$(3)\ f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}f'''(0) + \text{etc}\ldots$$

Folglich bleibt die Reihe:

$$(4)\ f(0),\ \frac{x}{1}f'(0),\ \frac{x^2}{1.2}f''(0),\ \frac{x^3}{1.2.3}f'''(0),\ \text{etc}\ldots,$$

deren allgemeines Glied:

$$(5)\qquad \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(0)$$

ist, convergent, so lange x zwischen den gegebenen Grenzen liegt, und diese Reihe gibt eine Summe, welche der Function $f(x)$ gleich ist. Hierin besteht der Maclaurinsche Lehrsatz.

Es ist zu bemerken, daß der in dem Ausdrucke (1) vorkommende Bruch:

$$(6)\qquad \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}$$

für einen unendlichen Werth von n verschwindet. Denn das Product:

$$m(n-m+1) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n+1}{2} - m\right)^2$$

wächst offenbar mit der ganzen Zahl m von $m=1$ bis $m = \frac{n}{2}$, und da

folglich

$$1\,n < 2(n-1) < 3(n-2) < \ldots$$

(7) $$1.2.3\ldots n > n^{\frac{n}{2}},$$

so ist klar, daß der Zahlenwerth des Bruches (6) beständig kleiner ist, als der der Größe:

(8) $$\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n,$$

und ebensowohl als diese Größe für $n=\infty$ verschwindet. Hieraus folgt unmittelbar, daß der Ausdruck (1) gegen die Grenze Null convergirt, wenn die Größe:

(9) $$f^{(n)}(\theta x)$$

einen endlichen Werth beibehält, während n unbestimmt wächst.

Folglich ist alsdann die Maclaurinsche Reihe, d. h. die Reihe (4) convergent und verificirt die Formel (3). Dieses findet für jeden reellen und endlichen Werth von x statt, wenn jedem derselben ein endlicher Werth der Function $f^{(n)}(x)$ entspricht.

Setzt man für $f(x)$ successive die drei Functionen:

$$e^x,\ \cos x,\ \sin x,$$

so findet man für die zugehörigen Werthe von $f^{(n)}(x)$:

$$e^x,\ \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\ \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

Da diese Größen für jedes x endlich bleiben, während n unbestimmt zunimmt; so kann man behaupten, daß der Maclaurinsche Lehrsatz immer auf die Functionen e^x, $\cos x$, $\sin x$ angewandt werden kann. Man hat also für beliebige reelle Werthe der Veränderlichen x:

(10) $$e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\text{etc}\ldots$$

(11) $$\cos x = 1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\text{etc}\ldots$$

(12) $$\sin x = \frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\text{etc}\ldots$$

Die Gleichung (10) stimmt mit der Gleichung (13) der Vorerinnerungen überein. Setzt man darin für die Veränderliche x das Product $x\,l(A)$, wo A eine positive Constante bezeichnet; so findet man mit Berücksichtigung der Formel:

$$A^x = e^{x\,l(A)},$$

(13) $$A^x = 1+\frac{x}{1}\,l(A)+\frac{x^2}{1.2}[l(A)]^2+\frac{x^3}{1.2.3}[l(A)]^3+\text{etc}\ldots$$

Uebrigens kann es geschehen, daß $f^{(n)}(\theta x)$ mit n unendlich wird, und daß dessen ungeachtet der Maclaurinsche Lehrsatz statt findet. Gesetzt z. B., daß

$$f(x) = l(1+x)$$

sei, und daß der Veränderlichen x ein kleinerer Zahlenwerth als die Einheit beigelegt würde; so ergibt sich in diesem Falle:

$$f^{(n)}(x) = \pm \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(1+x)^n}$$

und da das Verhältniß:

$$\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(1+x)^n}$$

beständig größer ist als das Product:

$$\frac{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(1+x)^n} = \frac{1}{1+x}\left\{\frac{\sqrt{n-1}}{1+x}\right\}^{n-1};$$

so nimmt es mit n unbestimmt zu, und folglich gilt dasselbe von den beiden Functionen $f^{(n)}(x)$, $f^{(n)}(\theta x)$. Der Ausdruck (2) verwandelt sich übrigens in:

$$(14) \qquad \pm \frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(1+\theta x)^n} = \pm \frac{x^n}{(1-\theta)}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n,$$

und da der Bruch:

$$\frac{1-\theta}{1+\theta x} = 1 - \frac{\theta(1+x)}{1+\theta x}$$

offenbar kleiner ist als die Einheit; so leuchtet ein, daß der Ausdruck (14) für $n = \infty$ verschwindet. Es ist daher für alle zwischen den Grenzen -1, $+1$ liegende Werthe von x:

$$(15) \qquad l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} x\ldots$$

Wenn der Zahlenwerth der Veränderlichen x größer würde als die Einheit, so würde das allgemeine Glied der Reihe:

$$(16) \qquad \frac{x}{1}, -\frac{x^2}{2}, \frac{x}{3}, -\frac{x^4}{4}, \text{etc.}\ldots,$$

nämlich:

$$(17) \qquad \pm \frac{x^n}{n},$$

für wachsende Werthe von n gegen die Grenze $\pm\infty$ convergiren. (Siehe Formel 11, Vorles. 5.) Folglich würde die Reihe (16), weil sie divergent wäre, keine Summe mehr haben, und die Formel (15) nicht verificiren.

Läßt man in der Formel (15) die Veränderliche x 1) gegen die Grenze 1 und 2) gegen die Grenze —1 convergiren, so erhält man im ersten Falle:

$$(18)\quad l(2)=1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\text{etc}\ldots=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\ldots$$
$$=0{,}69314718\ldots,$$

und im zweiten Falle:

$$(19)\quad l(0)=-(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\ldots)=-\infty.$$

Ferner wollen wir setzen:

$$f(x)=\text{arc. tang}\, x.$$

Wird alsdann für n eine ungerade Zahl gesetzt, so reducirt sich der Ausdruck (1) auf das letzte Glied der Formel (34) der 8ten Vorlesung, d. h. auf:

$$(20)\quad \mp\frac{x^n}{n}\,\frac{(1-\theta x\sqrt{-1})^{-n}+(1+\theta x\sqrt{-1})^{-n}}{2}.$$

Außerdem seien p_n, q_n zwei reelle, durch die Gleichung:

$$(21)\quad \frac{x^n}{n}(1+\theta x\sqrt{-1})^{-n}=p_n+q_n\sqrt{-1}$$

bestimmte Größen; so ist offenbar:

$$(22)\quad \frac{x^n}{n}(1-\theta x\sqrt{-1})^{-n}=p_n-q_n\sqrt{-1}$$

und folglich:

$$(23)\quad \frac{x^n}{n}\,\frac{(1-\theta x\sqrt{-1})^{-n}+(1+\theta x\sqrt{-1})^{-n}}{2}=p_n.$$

Ferner folgt aus den Formeln (21) und (22) durch Multiplication:

$$\left(\frac{x^n}{n}\right)^2(1+\theta^2x^2)^{-n}=p_n^2+q_n^2,$$

oder:

$$(24)\quad p_n^2+q_n^2=\frac{1}{n^2}\left(\frac{x^2}{1+\theta^2x^2}\right)^n.$$

Gibt man nun der Veränderlichen x einen Zahlenwerth, der kleiner ist als die Einheit, so wird der Werth des durch die Gleichung (24) gegebenen Binomiums $p_n^2+q_n^2$ offenbar für $n=\infty$ Null, und folglich convergirt die Größe $\mp p_n$ oder der Ausdruck (20) für wachsende Werthe von n gegen die Grenze Null. Folglich erhält man, wenn in der Formel (34) der 8ten Vorlesung $n=\infty$ gesetzt wird:

$$(25)\quad \text{arc. tang}\, x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots$$

Wenn der Zahlenwerth von x größer würde als die Einheit,

so würde alsdann, da der Ausdruck (17) gegen die Grenze ∞ convergirte, für wachsende Werthe von n, die Reihe

$$(27) \qquad \frac{x}{1}, -\frac{x^3}{3}, \frac{x^5}{5}, -\frac{x^7}{7} \text{ etc} \ldots$$

divergent sein, und folglich die Formel (25) nicht mehr verificiren.

Läßt man in der Formel (25) die veränderliche Größe x gegen die Grenze 1 convergiren, so findet man:

$$(27) \left\{ \begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \text{arc. tang } (1) = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \text{etc} \ldots \\ &= 2\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \text{etc} \ldots\right), \end{aligned} \right.$$

und folglich:

$$(28) \quad \pi = 8\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \text{etc} \ldots\right) = 3{,}14159265 \ldots$$

Setzt man hingegen $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, so gibt die Formel (25):

$$(29) \quad \frac{\pi}{6} = \text{arc. tang}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.3^2} + \frac{1}{7.3^3} + \ldots\right)$$

Nun wollen wir setzen:

$$f(x) = (1 + x)^{\mu},$$

wo μ eine constante Größe bezeichnet. In dieser Hypothese verwandelt sich die Maclaurinsche Reihe in:

$$(30) \quad 1, \; \mu x, \; \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} x^2, \; \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} x^3, \text{ etc} \ldots,$$

während sich die Ausdrücke (1) und (2) auf die letzten Glieder der Reihen (17) und (67) der 8ten Vorlesung, d. h. auf die Producte:

$$(31) \qquad \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n} x^n (1 + \theta x)^{\mu - n}$$

und:

$$(32) \qquad \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)} (1-\theta)^{n-1} x^n (1 + \theta x)^{\mu - n}$$

reduciren.

Bezeichnet man ferner das allgemeine Glied der Reihe (30) durch u_n, und durch m eine kleinere ganze Zahl als n; so hat man offenbar:

$$(33) \qquad u_n = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n} x^n,$$

$$(34)\quad u_n = (-1)^{n-m}\left(1-\frac{\mu+1}{m+1}\right)\left(1-\frac{\mu+1}{m+2}\right)\cdots\left(1-\frac{\mu+1}{n}\right)x^{n-m}\cdot u_m.$$

Nun wollen wir durch r den numerischen Werth von x, und durch ρ eine zwischen den Grenzen 1 und r willkührlich gewählte Zahl bezeichnen; so kann man offenbar der Größe n, indem $n > m$ ist, einen hinreichend großen Werth geben, daß das Product:

$$\left(1-\frac{\mu+1}{n}\right)x$$

zwischen 1 und ρ liegt. Alsdann liegt auch der Werth des Verhältnisses:

$$\frac{u_n}{u_m} = (-1)^{n-m}\left(1-\frac{\mu+1}{m+1}\right)\left(1-\frac{\mu+1}{m+2}\right)\cdots\left(1-\frac{\mu+1}{n}\right)x^{n-m}$$

zwischen den Grenzen 1 und ρ^{n-m}. Ist also

$$r > \rho > 1,$$

so wird der Bruch $\frac{u_n}{u_m}$, und das Product dieses Bruches mit u_m oder die Größe u_n, für $n=\infty$ mit ρ^{n-m} zu gleicher Zeit unendlich. Ist im Gegentheil:

$$r < \rho < 1,$$

so verschwinden die Größen $\frac{u_n}{u_m}$ und u_n mit ρ^{n-m} gleichzeitig für $n=\infty$.

Noch wollen wir hinzufügen, daß dasselbe gilt 1) von der Größe:

$$(35)\qquad \frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)}\,x^{n-1},$$

welche man aus u_n ableitet, wenn man μ und n um eine Einheit vermindert; 2) von dem Ausdrucke (32), welchen man erhält, wenn man die Größe (35) mit dem Producte:

$$\mu x(1+\theta x)^{\mu-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$$

multiplicirt, weil dieses Product für wachsende Werthe von n gegen eine endliche Grenze, oder gegen Null convergirt. Folglich ist die Reihe (30), deren allgemeines Glied mit der Zahl n unendlich wird, für $x > 1$ divergent, und hat keine Summe mehr. Wenn aber der Zahlenwerth von x kleiner ist als die Einheit, so folgt aus der Formel (67) der 8ten Vorlesung, wenn man $n=\infty$ setzt:

$$(36)\quad (1+x)^{\mu} = 1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3+\text{etc.}\ldots$$

Durch ähnliche Betrachtungen, wie die vorhergehenden, könnte man leicht zeigen, daß der Ausdruck (31) für einen unendlichen Werth von n verschwindet, wenn die Veränderliche x zwischen den Grenzen 0, 1 liegt. Hieraus folgt, daß die Gleichung (36) aus der Formel (17) der 8ten Vorlesung nur in dem Falle abgeleitet werden kann, wo die veränderliche Größe positiv, und kleiner als die Einheit bleibt.

Setzt man in der Formel (36) für die Größe μ eine ganze Zahl n, so erhält man die Gleichung (40) der 8ten Vorlesung wieder. Wenn man in derselben Formel $-\mu$ für μ setzt, so folgt daraus:

$$(37)\quad (1+x)^{-\mu}=1-\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu+1)}{1.2}x^2-\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.2.3}x^3+\text{etc}\ldots$$

Es ist mithin:

$$(38)\quad (1-x)^{-\mu}=1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu+1)}{1.2}x^2+\frac{\mu(+1)(\mu+2)}{1.2.3}x^3+\text{etc}\ldots$$

Setzt man endlich successive $\mu=1$, $\mu=2$, $\mu=3$, etc..., $\mu=m$, wo m eine beliebige ganze Zahl bezeichnet; so gibt die Gleichung (38):

$$(39)\quad \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots x^n+\text{etc}\ldots$$

$$(40)\quad \frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+(n+1)x^n+\text{etc}\ldots$$

$$(41)\quad \frac{1}{(1-x)^3}=1+3x+6x^2+10x^3+\ldots$$
$$+\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}x^n+\text{etc}\ldots$$

und

$$(42)\quad \frac{1}{(1-x)^m}=1+mx+\frac{m(m+1)}{1.2}x^2+\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}x^3\ldots$$

Setzt man hingegen $\mu=\frac{1}{2}$, so findet man:

$$(43)\quad (1-x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\ldots$$
$$+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}x^n+\ldots$$

Jetzt wollen wir annehmen, daß einer der Ausdrücke:

$$(44)\quad \frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}[a+\theta(x-a)],$$

$$(45)\quad \frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots(n-1)}(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}[a+\theta(x-a)],$$

für alle Werthe von x zwischen den Grenzen $x=a$, $x=a+h$ und für $\theta<1$ unbestimmt abnehme, während n zunimmt. Setzt man alsdann in der Gleichung (44) oder (60) der 8ten Vorlesung $n=\infty$, so findet man:

$$(46)\quad f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\ldots$$
$$+\frac{(x-a)^3}{1.2.3}f'''(a)+\text{etc}\ldots$$

Setzt man, um die Begriffe zu fixiren, $x=a+h$; so gibt die Formel (46):

$$(47)\quad f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(a)+\text{etc}\ldots$$

Endlich erhält man, wenn in der vorigen Formel für den besondern Werth a der Veränderlichen x diese Veränderliche selbst gesetzt wird, die Formel:

$$(48)\quad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots$$
$$+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)+\text{etc}\ldots$$

Diese letzte Formel findet jedesmal statt, wenn die Functionen:

$$(49)\quad f(x+z),\ f'(x+z),\ f''(x+z),\ \text{etc}\ldots$$

zwischen den Grenzen $z=0$, $z=h$ continuirlich sind, und eine der Größen:

$$(50)\quad \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h),$$

$$(51)\quad \frac{h^n}{1.2\ldots(n-1)}(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(x+\theta h),$$

für einen unendlichen Werth von n verschwindet. Alsdann ist die Reihe:

$$(52)\quad f(x),\ \frac{h}{1}f'(x),\ \frac{h^2}{1.2}f''(x),\ \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x),\ \text{etc}\ldots,$$

deren allgemeines Glied:

$$(53)\quad \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x)$$

ist, convergent, und gibt eine Summe, welche gleich $f(x+h)$ ist. Der eben ausgesprochene Satz ist der Taylorsche Lehrsatz.

Beispiele. Setzt man für $f(x)$ successive die beiden Functionen:

$$l(x),\ x^{\mu}$$

und den Zahlenwerth von h kleiner als den von x; so findet man:

$$(54)\quad l(x+h)=l(x)+\frac{h}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{h^2}{x^2}+\frac{1}{3}\frac{h^3}{x^3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{h^4}{x^4}+\text{etc}\ldots$$

$$(35)\quad (x+h)^{\mu}=x^{\mu}+\frac{\mu}{1}x^{\mu-1}h+\frac{\mu(\mu-1)}{.1.2}x^{\mu-2}h^2+\text{etc}\ldots$$

Man könnte diese Formeln unmittelbar aus den Gleichungen (15) und (36) herleiten, wenn man in derselben $\frac{h}{x}$ für x setzte.

Es verdient bemerkt zu werden, daß der Maclaurinsche und Taylorsche Lehrsatz nicht bloß für reelle Werthe der Function $f(x)$, sondern auch für imaginäre statt finden. Denn es sei:

$$(56)\qquad f(x)=\varphi(x)+\chi(x)\sqrt{-1},$$

wo $\varphi(x)$ und $\chi(x)$ zwei reelle Functionen der Veränderlichen x bezeichnen. Wenn einer der Ausdrücke:

$$(57)\qquad \frac{x^n}{1.2..3\ldots n}\varphi^{(n)}(\theta x),$$

$$(58)\qquad \frac{x^n}{1.2\ldots(n-1)}(1-\theta)^{n-1}\varphi^{(n)}(\theta x),$$

für $\theta<1$ und für unendliche Werthe von n sich auf Null reducirt, so hat man:

$$(59)\quad \varphi(x)=\varphi(0)+\frac{x}{1}\varphi'(0)+\frac{x^2}{1.2}\varphi''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}\varphi'''(x)+\text{etc}\ldots$$

Desgleichen, wenn einer der Ausdrücke:

$$(60)\qquad \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\chi^{(n)}(\theta x),$$

$$(61)\qquad \frac{(x-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}(1-\theta)^{(n-1)}\chi^{(n)}(\theta x),$$

für $n=\infty$ verschwindet; so findet sich:

$$(62)\quad \chi(x)=\chi(0)+\frac{x}{1}\chi'(x)+\frac{x^2}{1.2}\chi''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}\chi'''(0)+\text{etc}\ldots$$

Nun folgt aus der Vereinigung der Formeln (61) und (62):

$$(63)\quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x)+\chi(x)\sqrt{-1}=\varphi(0)+\chi(0)\sqrt{-1}+\frac{x}{1}[\varphi'(0)+\chi'(0)\sqrt{-1}] \\ \qquad +\frac{x^2}{1.2}[\varphi''(0)+\chi''(0)\sqrt{-1}]+\text{etc}\ldots; \end{array} \right.$$

und es ist leicht einzusehen, daß diese letzte Gleichung von der Maclaurinschen, aus welcher sie abgeleitet wird, wenn man für $f^{(n)}(x)$ die imaginäre Function $\varphi(x)+\chi(x)\sqrt{-1}$ setzt, nicht verschieden ist. Dieselben Schlüsse lassen sich auf die Taylorsche Formel anwenden.

Die Formeln (59) und (62), und folglich auch die Formel (63), subsistiren offenbar in dem Falle, wo die Functionen $\varphi^{(n)}(x)$ und $\chi^{(n)}(x)$ für $n=\infty$ endliche Werthe behalten, was auch x sein mag; d. h. mit andern Worten, in dem Falle, wo die imaginäre Function:

$$(64)\qquad \varphi^{(n)}(x)+\chi^{(n)}(x)\sqrt{-1}$$

endlich bleibt, während n unbestimmt zunimmt.

Beispiele. Setzt man:

$$f(x)=\cos x+\sqrt{-1}\sin x,$$

so gibt die Formel (3) oder (63):

$$(65)\quad \left\{ \begin{array}{l} \cos x+\sqrt{-1}\sin x=1+\frac{x}{1}\sqrt{-1}-\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^3}{1.2.3}\sqrt{-1} \\ \qquad +\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}\sqrt{-1}-\text{etc}\ldots \end{array} \right.$$

Die vorhergehende imaginäre Function wird von selbst in zwei reelle gelegt, welche nichts anders sind, als die Gleichungen (11) und (12).

Ferner sei:

$$f(x)=e^{ax}(\cos bx+\sqrt{-1}.\sin bx),$$

wo a und b zwei reelle Constanten bezeichnen; so findet man mit Bezugnahme auf die letzte Formel Seite 29:

$$f'(x)=(a+b\sqrt{-1})e^{ax}(\cos bx+\sqrt{-1}\sin bx)=(a+b\sqrt{-1})f(x),$$

$$f''(x)=(a+b\sqrt{-1})f'(x)=(a+b\sqrt{-1})^2 f(x),$$

$$\text{etc}\ldots,$$

$$f^{(n)}(x)=(a+b\sqrt{-1})^n f(x),$$

und folglich:

$$f(0)=1,\ f'(0)=a+b\sqrt{-1},\ f''(0)=(a+b\sqrt{-1})^2,\ldots.$$

$$f^{(n)}(0)=(a+b\sqrt{-1})^n.$$

Ausdrücke genannt werden. Bezeichnet man diesen Modulus durch r, so hat man folglich:

$$(5)\qquad r^2=(p+q\sqrt{-1})(p-q\sqrt{-1})=p^2+q^2,$$

$$(5)\qquad r=\sqrt{p^2+q^2},$$

Ueberdies sei:

$$(7)\qquad (p+q\sqrt{-1})^n=p_n+q_n\sqrt{-1},$$

wo p_n, q_n wieder zwei reelle Größen bezeichnen. Da folglich:

$$(8)\qquad (p-q\sqrt{-1})^n=p_n-q_n\sqrt{-1}$$

ist, so folgt daraus:

$$(9)\qquad p_n^2+q_n^2=(p+q\sqrt{-1})^n(p-q\sqrt{-1})^n=(p^2+q^2)^n=r^{2n},$$

$$(10)\qquad \sqrt{(p_n^2+q_n^2)}=r^n.$$

Um also den Modulus von x^n zu bekommen, braucht man nur den Modulus r der Veränderlichen x auf die nte Potenz zu erheben. Gesetzt nun, daß n immer größere Werthe bekomme. Damit der Ausdruck:

$$x^n=p_n+q_n\sqrt{-1}$$

gegen die Grenze Null convergire, ist erforderlich und genügend, daß die reellen Größen p_n, q_n gegen dieselbe Grenze convergiren. Nun ist aber einleuchtend, daß diese Bedingung erfüllt wird, oder nicht, jenachdem der Modulus r der Veränderlichen x kleiner ist als die Einheit, oder nicht. Denn setzt man $r<1$ und $n=\infty$, so folgt aus der Gleichung (10):

$$p_n^2+q_n^2=0,\quad p_n=0,\quad q_n=0.$$

Setzt man im Gegentheil $r=1$ oder $r>1$ und $n=\infty$, so gibt die Gleichung (10):

$$p_n^2+q_n^2=1,\ \text{oder}\ p_n^2+q_n=\infty,$$

und folglich wird wenigstens eine der Größen p_n, q_n nicht mehr gegen die Grenze Null für wachsende Werthe von n convergiren. Aus diesen Bemerkungen folgt offenbar, daß das Product:

$$\frac{a}{1-x}x^n=\frac{a x^n}{1-x},$$

in welchem der Factor x^n sich allein mit der Zahl n ändert, für $n=\infty$ den Werth Null bekommt, wenn $r<1$ ist, und einen von Null verschiedenen Werth, wenn $r=1$ oder $r>1$ ist. Ist also die Veränderliche x imaginär, so wird die Reihe (1) convergent sein, wenn der Modulus von x kleiner als 1 ist. Aber sie wird divergent sein, wenn $r=1$ oder $r>1$ ist. Dieser Schluß findet auch dann statt, wenn a imaginär wird; und in dem Falle, wo $q=0$,

folglich

$$1\,n < 2(n-1) < 3(n-2) < \ldots$$

(7) $$1.2.3\ldots n > n^{\frac{n}{2}},$$

so ist klar, daß der Zahlenwerth des Bruches (6) beständig kleiner ist, als der der Größe:

(8) $$\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n,$$

und ebensowohl als diese Größe für $n=\infty$ verschwindet. Hieraus folgt unmittelbar, daß der Ausdruck (1) gegen die Grenze Null convergirt, wenn die Größe:

(9) $$f^{(n)}(\theta x)$$

einen endlichen Werth beibehält, während n unbestimmt wächst.

Folglich ist alsdann die Maclaurinsche Reihe, d. h. die Reihe (4) convergent und verificirt die Formel (3). Dieses findet für jeden reellen und endlichen Werth von x statt, wenn jedem derselben ein endlicher Werth der Function $f^{(n)}(x)$ entspricht.

Setzt man für $f(x)$ successive die drei Functionen:

$$e^x,\ \cos x,\ \sin x,$$

so findet man für die zugehörigen Werthe von $f^{(n)}(x)$:

$$e^x,\ \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\ \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

Da diese Größen für jedeß x endlich bleiben, während n unbestimmt zunimmt; so kann man behaupten, daß der Maclaurinsche Lehrsatz immer auf die Functionen e^x, $\cos x$, $\sin x$ angewandt werden kann. Man hat also für beliebige reelle Werthe der Veränderlichen x:

(10) $$e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\text{etc}\ldots$$

(11) $$\cos x = 1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\text{etc}\ldots$$

(12) $$\sin x = \frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\text{etc}\ldots$$

Die Gleichung (10) stimmt mit der Gleichung (13) der Vorerinnerungen überein. Setzt man darin für die Veränderliche x das Product $x\,l(A)$, wo A eine positive Constante bezeichnet; so findet man mit Berücksichtigung der Formel:

$$A^x = e^{x\,l(A)},$$

(13) $$A^x = 1+\frac{x}{1}\,l(A)+\frac{x^2}{1.2}[l(A)]^2+\frac{x^3}{1.2.3}[l(A)]^3+\text{etc}\ldots$$

wo v_n, w_n zwei reelle Größen bezeichnen, wovon die zweite jedesmal verschwindet, wenn die Reihe (11) reell wird. Da die durch die Gleichung (12) ausgedrückte Summe s_n sich in

$$(16)\ s_n = (v_0 + w_0\sqrt{-1}) + (v_1 + w_1\sqrt{-1}) + \ldots + (v_{n-1} + w_{n-1}\sqrt{-1})$$
$$= (v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}) + (w_0 + w_1 + \ldots + w_{n-1})\sqrt{-1}$$

verwandelt, so convergirt sie für wachsende Werthe von n gegen eine bestimmte Grenze, wenn die beiden reellen Summen:

$$v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1},$$
$$w_0 + w_1 + \ldots + w_{n-1},$$

gegen solche Grenzen convergiren. Hieraus folgt, daß die Reihe (11) stets mit den reellen Reihen:

$$(17)\qquad v_0,\ v_1,\ v_2, \ldots v_n,\ \text{etc} \ldots$$

$$(18)\qquad w_0,\ w_1,\ w_2, \ldots w_n,\ \text{etc} \ldots$$

zu gleicher Zeit convergent ist. Wenn diese letzten Reihen divergent werden, oder bloß eine von ihnen, so ist es die Reihe (11) ebenfalls.

Zur Convergenz der Reihen (17) und (18) ist erforderlich und zureichend, nach den vorhin gemachten Bemerkungen, daß die verschiedenen Größen:

$$(19)\qquad v_n,\ v_n + v_{n+1},\ v_n + v_{n+1} + v_{n+2},\ \text{etc} \ldots$$

$$(20)\qquad w_n,\ w_n + w_{n+1},\ w_n + w_{n+1} + w_{n+2},\ \text{etc} \ldots$$

für $n = \infty$ verschwinden. Nun wird aber diese Bedingung nothwendig erfüllt, wenn die Moduli der verschiedenen Glieder der Reihe (11) oder (14) eine convergirende Reihe bilden. Denn es sei

$$(21)\qquad \rho_n = \sqrt{v_n^2 + w_n^2}.$$

der Modulus des Ausdrucks (15), welcher das allgemeine Glied der Reihe (11) ist. Dieser Modulus ist eine positive Größe, welche offenbar größer ist als der Zahlenwerth von v_n und der von w_n. Folglich sind die Zahlenwerthe der Größen (19) und (20) kleiner als die der correspondirenden Größen:

$$(22)\qquad \rho_n,\ \rho_n + \rho_{n+1},\ \rho_n + \rho_{n+1} + \rho_{n+2},\ \text{etc} \ldots$$

Bilden nun die Moduli der verschiedenen Glieder der Reihe (11) oder (14), d. h.:

$$(23)\qquad \rho_0,\ \rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3, \ldots \rho_n\ \text{etc} \ldots$$

oder:

$$(24)\qquad \rho_m,\ \rho_{m+1},\ \rho_{m+2},\ \text{etc} \ldots,$$

eine convergirende Reihe, so verschwinden die Größen (22) für

$n=\infty$. Folglich verschwinden die Größen (19) und (20) um so mehr. Hieraus folgt, daß die Reihe (11) oder (14) convergent ist, wenn die Moduli ihrer verschiedenen Glieder eine convergirende Reihe bilden.

Wenn der Zahlenwerth von ρ_n nicht unbestimmt abnimmt für wachsende Werthe von n, so gilt dasselbe von einer der Größen v_n, w_n. Alsdann wird eine der Reihen (17) und (18), und folglich die Reihe (11), nothwendig divergent.

Von den eben aufgestellten Sätzen ausgehend, lassen sich folgende beiden Lehrsätze leicht beweisen.

Lehrsatz 1. Man suche die Grenze oder die Grenzen, gegen welche der Ausdruck:

$$(25) \qquad (\rho_n)^{\frac{1}{n}}$$

convergirt, wenn n unbestimmt wächst, und es sei R die größte dieser Grenzen; so ist die Reihe (11) convergent, wenn $R<1$, und divergent, wenn $R>1$ ist.

Beweis. Es sei zuerst $R<1$, und wir wollen zwischen den beiden Zahlen 1 und R willkührlich eine dritte Zahl ρ wählen, so daß:

$$(26) \qquad R<\rho<1.$$

Nimmt nun n über jede angebbare Grenze hinaus zu, so können sich die größten Werthe von $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$ nicht unbestimmt der Grenze R nähern, wenn sie nicht zuletzt beständig kleiner sind als ρ. Folglich ist es möglich, der ganzen Zahl m einen hinreichend großen Werth zu geben, daß, wenn $n=m$ oder $>m$ wird, beständig

$$(\rho_n)^{\frac{1}{n}}<\rho, \quad \rho_n<\rho^n$$

ist.

Alsdann sind die Glieder der Reihe (24) kleinere Zahlen, als die correspondirenden Glieder der geometrischen Progression:

$$(27) \qquad \rho^m, \rho^{m+1}, \rho^{m+2}, \text{etc}\ldots,$$

und da diese letzte Reihe, wegen $\rho<1$, convergent ist; so gilt dasselbe von der Reihe (24), und folglich von den Reihen (14) und (11).

Zweitens wollen wir $R>1$ setzen, und wieder zwischen den zwei Zahlen 1 und R eine dritte Zahl ρ annehmen, so daß

$$(28) \qquad R>\rho>1.$$

Wenn n über jede Grenze hinaus wächst, so werden die größten Werthe von $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$, indem sie sich der Grenze R unbestimmt nähern, zuletzt größer sein als ρ. Man kann also für beliebig große Werthe von n der Bedingung:

$$(\rho_n)^{\frac{1}{n}}>\rho>1, \text{ oder } \rho_n>\rho^n>1,$$

Genüge leisten, und man findet folglich in der Reihe (24) eine unbestimmte Anzahl von größern Gliedern als die Einheit, welches also zum Beweise ihrer Divergenz, und der der Reihen (14), (11) hinreichend ist.

Lehrsatz 2. Wenn das Verhältniß:

$$\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}, \tag{29}$$

für immer größer werdende Werthe von n gegen eine bestimmte Grenze R convergirt, so ist die Reihe (11) jedesmal convergent, wenn $R<1$, und divergent, wenn $R>1$ ist.

Beweis. Es sei ε eine Zahl, welche kleiner ist als die zwischen 1 und R stattfindende Differenz; so ist es möglich, m einen so großen Werth zu geben, daß, wenn $n=m$ oder $n>m$ wird, das Verhältniß:

$$\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}$$

zwischen den beiden Grenzen:

$$R-\varepsilon,\ R+\varepsilon$$

bleibt.

Alsdann liegen die verschiedenen Glieder der Reihe (24) zwischen den correspondirenden der beiden geometrischen Progressionen:

$$\rho_m,\ \rho_m(R-\varepsilon),\ \rho_m(R-\varepsilon)^2,\ \rho_m(R-\varepsilon)^3,\ \text{etc}\ldots$$

$$\rho_m,\ \rho_m(R+\varepsilon),\ \rho_m(R+\varepsilon)^2,\ \rho_m(R+\varepsilon)^3,\ \text{etc}\ldots,$$

welche beide convergent sind, wenn $R<1$, und divergent, wenn $R>1$ ist. Folglich etc...

Anmerkung. Es würde leicht zu beweisen sein, daß die Grenze des Verhältnisses (29), wenn sie existirt, zugleich die des Ausdrucks (25) ist. (Algeb. Analys. Cap. II. § 3.)

Wendet man den Lehrsatz 1 und 2 auf die Maclaurinsche und Taylorsche Reihe an, so bekommt man die folgenden Sätze.

Lehrsatz 3. Es sei $f(x)$ eine reelle oder imaginäre Function der Veränderlichen x, und φ_n der Zahlenwerth oder der Modulus des Ausdrucks:

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(0). \tag{30}$$

Ferner sei Φ die Grenze, gegen welche die größten Werthe von $(\varphi_n)^{\frac{1}{n}}$ convergiren, wenn n unbestimmt größer wird, oder vielmehr die einzige Grenze des Verhältnisses $\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}$, wenn sie existirt; so ist die Ma-

claurinsche Reihe:

(31) $f(0),\ \frac{x}{1}f'(0),\ \frac{x^2}{1.2}f''(0),\ \frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)$, etc...,

jedesmal convergent, wenn der Zahlenwerth der reellen Veränderlichen x, oder der Modulus der imaginären Veränderlichen x kleiner ist als $\frac{1}{\Phi}$, und divergent, so oft der numerische Werth oder der Modulus von x größer ist als $\frac{1}{\Phi}$.

Beweis. Es sei r der Zahlenwerth oder der Modulus der Veränderlichen x, so ist das Product:

$$\varphi_n r^n$$

der Zahlenwerth oder der Modulus des allgemeinen Gliedes:

$$(32)\qquad \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(0).$$

Setzt man nun in den Lehrsätzen 1 und 2 für die Reihe (11) die Reihe (31), so ist offenbar:

$$(33)\qquad \rho_n = \varphi_n r^n,\quad (34)\ R = \Phi r.$$

Mithin ist die Reihe (31) convergent, wenn man hat:

$$(34)\qquad \Phi r < 1 \text{ oder } r < \frac{1}{\Phi},$$

und divergent, wenn

$$(35)\qquad \Phi r > 1 \text{ oder } r > \frac{1}{\Phi}$$

ist.

Beispiele. Nimmt man $f(x) = e^x$, so hat man:

$$f^{(n)}(0) = 1,\ \varphi_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n},\ \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = \frac{1}{n+1}.$$

$$(36)\qquad \Phi = \lim \frac{1}{n+1} = 0,\quad (37)\ \frac{1}{\Phi} = \infty.$$

In diesem Falle ist die Reihe (31) auf die Reihe (11) der Vorerinnerungen zurückgeführt. Folglich ist diese letzte Reihe, nämlich:

$$(38)\qquad 1 + \frac{x}{1},\ \frac{x^2}{1.2},\ \frac{x^3}{1.2.3},\ldots \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} \text{ etc.}$$

convergent, so lange der Zahlenwerth oder der Modulus von x die Grenze ∞ nicht erreicht; d. h. die Reihe (38) ist für jeden beliebigen endlichen reellen, oder imaginären Werth der Veränderlichen

x convergent. Dasselbe gilt von den beiden Reihen:

$$(39)\qquad 1,\ -\frac{x^2}{1.2},\ \frac{x^4}{1.2.3.4},\ -\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6},\ \text{etc}\ldots$$

$$(40)\qquad \frac{x}{1},\ -\frac{x^3}{1.2.3},\ \frac{x^5}{1.2.3.4.5},\ \text{etc}\ldots,$$

welche man erhält, wenn man $f(x)=\cos x$ und $f(x)=\sin x$ setzt, und welche aus der Reihe (38) abgeleitet werden, wenn man die Glieder von geradem, oder ungeradem Range wegläßt und vor das zweite, vierte, sechste Glied.... das Zeichen — setzt. Denn für die Reihen (38), (39) und (40) ist:

$$(41)\qquad \Phi=\lim\left(\frac{1}{1.2.3\ldots n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

und da dieser Werth mit dem Werthe (36) übereinstimmen muß, so ist nothwendig $\Phi=0$.

Setzt man für $f(x)$ die Function $l(1+x)$, so findet man:

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}.1.2.3\ldots(n-1),\quad \varphi_n=\frac{1}{n},\quad \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}=\frac{n}{n+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}},$$

$$(42)\qquad \Phi=\lim\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\lim\ldots\lim\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1,\quad (43)\ \frac{1}{\Phi}=1.$$

In diesem Falle verwandelt sich die Reihe (31) in:

$$(44)\qquad \frac{x}{1},\ -\frac{x^2}{2},\ \frac{x^3}{3},\ -\frac{x^4}{4},\ \frac{x^5}{5},\ \text{etc}\ldots$$

Diese Reihe ist mithin convergent, so lange der Zahlenwerth oder der Modulus von x kleiner als 1 bleibt. Ein Gleiches gilt von der Reihe:

$$(45)\qquad \frac{x}{1},\ -\frac{x^3}{3},\ \frac{x^5}{5},\ -\frac{x^7}{7},\ \text{etc}\ldots,$$

welche man erhält, wenn $f(x)=\text{arc. tang}\ x$ gesetzt wird, und welche aus der Reihe (44) abgeleitet wird, wenn man die Glieder von geradem Range wegläßt, und das Zeichen des zweiten, vierten, sechsten... der beibehaltenen Glieder verändert.

Setzt man endlich $f(x)=(1+x)^{\mu}$, indem μ eine reelle Constante bezeichnet; so findet man für sehr große Werthe von n:

$$f^{(n)}(0)=\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1),\quad \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}=\frac{n-\mu}{n+1}=\frac{1-\frac{\mu}{n}}{1+\frac{1}{n}}.$$

$$(46)\qquad \Phi = \lim \frac{1-\frac{\mu}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1, \quad (47)\ \frac{1}{\Phi} = 1.$$

In diesem Falle verwandelt sich die Reihe (31) in:

$$(48)\quad 1,\ \mu x,\ \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2,\ \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3,\ \text{etc}\ldots$$

Folglich ist diese Reihe convergent, so lange der Zahlenwerth oder der Modulus von x kleiner bleibt als die Einheit.

Lehrsatz 4. Wenn sich alles wie im vorhergehenden Lehrsatze verhält, die Function $f(x)$ aber, so wie ihre Veränderliche x, reell ist; so wollen wir durch θ eine kleinere Zahl als die Einheit bezeichnen, durch ψ_n den numerischen Werth eines der Ausdrücke:

$$(49)\qquad \frac{f^{(n)}(\theta x)}{1.2.3\ldots n}, \qquad (50)\ \frac{(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta x)}{1.2.3\ldots(n-1)},$$

und durch Ψ die Grenze, gegen welche die größten Werthe von $(\psi_n)^{\frac{1}{n}}$ convergiren, oder vielmehr die einzige Grenze des Verhältnisses $\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}$, wenn diese Grenze existirt. Alsdann ist die Maclaurinsche Reihe:

$$(51)\ f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}f'''(0) + \text{etc}\ldots$$

für jeden Werth von x gültig, welchem ein zwischen den Grenzen -1, $+1$ liegender Werth des Productes Ψx entspricht.

Beweis. Es sei r der Zahlenwerth von x, so hat man, wenn das Product Ψx zwischen den Grenzen -1, $+1$ liegt:

$$(52)\qquad \Psi r < 1.$$

Folglich ist die Reihe, deren allgemeines Glied das Product:

$$(53)\qquad \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(\theta x),$$

oder:

$$(54)\qquad \frac{x^n}{1.2.3\ldots(n-1)}(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta x)$$

ist, convergent. Mithin verschwindet dieses Product für $n=\infty$, und die Gleichung (8) oder (61) der 8ten Vorlesung führt zu der Reihe (51).

Zusatz 1. Die Formel (51) subsistirt für alle zwischen den Grenzen:

$$(55)\qquad x = -\frac{1}{\Phi},\ x = \frac{1}{\Phi}$$

liegende reelle Werthe von x, wenn für jeden dieser Werthe eins der Verhältnisse:

$$(56)\qquad \frac{f^{(n)}(\theta x)}{f^{(n)}(0)},\qquad (57)\ \frac{(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(\theta x)}{f^{(n)}(0)}$$

einen endlichen Werth behält, während n unendlich groß wird. Denn es sei χ_n der Zahlenwerth des Verhältnisses (56) oder (57), und angenommen, dieser Zahlenwerth bleibe stets kleiner als die Zahl k; so convergirt der Ausdruck:

$$(\chi_n)^{\frac{1}{n}},$$

welcher beständig kleiner ist als $k^{\frac{1}{n}}$, für wachsende Werthe von n gegen eine Grenze, die gleich oder kleiner als $k^0 = 1$ ist. Dasselbe läßt sich von dem Ausdrucke:

$$(n\chi_n)^{\frac{1}{n}}$$

sagen, weil nach der Formel (24) der 5ten Vorlesung, $\lim n^{\frac{1}{n}} = 1$ ist. Bezeichnen überdies φ_n, χ_n die numerischen Werthe der Verhältnisse (49) und (56), so hat man offenbar:

$$\psi_n = \varphi_n \chi_n,$$

und folglich:

$$\Psi = \Phi \lim (\chi_n)^{\frac{1}{n}} = \text{oder} < \Phi.$$

Desgleichen, wenn ψ_n, χ_n die Zahlenwerthe der Verhältnisse (50) und (57) bezeichnen, so hat man:

$$\psi_n = n\varphi_n \chi_n,$$

also:

$$\Psi = \Phi \lim (n\chi_n)^{\frac{1}{n}} = \text{oder} < \Phi.$$

Es ist also in der gemachten Voraussetzung offenbar:

$$\Psi = \text{oder} < \Phi,\ \Psi r = \text{oder} < \Phi r.$$

Folglich wird die Bedingung (52) erfüllt, und die Formel (51) subsistirt für alle reelle Werthe von x, welche der Gleichung (34) Genüge leisten, d. h. für alle reelle Werthe von x, welche die Reihe (31) convergent machen.

Beispiel. Setzt man $f(x) = e^x$, so reducirt sich das Verhältniß (56) auf die Exponentialgröße:

$$(58)\qquad e^{\theta x},$$

in welcher sich die Größe θ allein mit n ändert, aber so, daß sie zwischen den Grenzen 0, 1 bleibt, und welche daher offenbar für jeden endlichen Werth von x einen endlichen Werth behält, während die Zahl n unbestimmt wächst.

Mithin ist die Formel (10) der vorhergehenden Vorlesung für alle reelle Werthe von x gültig, welche die Reihe (38) convergent machen, was man schon wußte.

Setzt man für $f(x)$ successive die beiden Functionen:

$$l(1+x),\ (1+x)^{\mu},$$

so findet man für die correspondirenden Werthe des Verhältnisses (57):

$$(59)\quad \frac{1}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1},\quad (60)\ (1+\theta)^{\mu-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}.$$

Nun behalten aber in diesen letzten Ausdrücken die beiden Factoren $\frac{1}{1+\theta x}$, $(1+\theta x)^{\mu-1}$ endliche Werthe für jeden endlichen Werth von x, und der Factor $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$ bleibt <1, wenn die veränderliche Größe x zwischen den Grenzen $x=-1$, $x=1$ liegt, weil $n-1$ eine positive Zahl ist. Folglich finden die Formeln (15) und (36) der vorigen Vorlesung für alle zwischen diesen Grenzen liegende Werthe von x statt, welches auch schon bekannt war.

Zusatz 2. Der erste Zusatz erstreckt sich selbst auf den Fall, wo die, gewissen Werthen von n entsprechenden Werthe von $f^{(n)}(0)$ verschwinden, wofern man in diesem Falle die correspondirenden Werthe der Verhältnisse (56), (57) nicht in Rechnung bringt.

Beispiele. Nimmt man für $f(x)$ successive die beiden Functionen cos x, sin x, so reducirt sich der Ausdruck (56) auf eins der Verhältnisse:

$$(61)\quad \frac{\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)}{\cos\frac{n\pi}{2}},\quad (62)\ \frac{\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)}{\sin\frac{n\pi}{2}}.$$

Nun bekommen diese beiden Verhältnisse unendliche Werthe, wenn $f^{(n)}(0)=0$ wird, und zwar das erste, wenn die Zahl n ungerade, und das zweite, wenn die Zahl n gerade ist. Bringt man aber diese unendlichen Werthe nicht in Rechnung, und gibt der Zahl n in dem ersten Verhältnisse einen geraden und in dem zweiten immer einen ungeraden Werth; so reduciren sich diese Verhältnisse stets auf eine der endlichen Größen:

$$\sin x,\ \cos x,\ -\sin x,\ -\cos x.$$

Mithin gelten die Formeln (11) und (12) der vorhergehenden Vorlesung für alle möglichen reellen Werthe der Veränderlichen x.

Aehnliche Betrachtungen, wie die für die Lehrsätze 3 und 4 gebrauchten, führen, wenn sie auf die Taylorsche Reihe angewandt werden, unmittelbar zu den folgenden beiden Lehrsätzen.

Lehrsatz 5. Es sei $f(x)$ eine reelle oder imaginäre Function der reellen Veränderlichen x, h eine reelle oder imaginäre Constante, und φ_n der Zahlenwerth, oder der Modulus des Ausdruckes:

$$(63) \qquad \frac{1}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x).$$

Ferner sei Φ die Grenze, gegen welche die größten Werthe von $(\varphi_n)^{\frac{1}{n}}$ convergiren, oder die einzige Grenze des Verhältnisses $\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}$, wenn diese Grenze existirt, während n unbestimmt größer wird; so ist die Taylorsche Reihe:

$$(64) \quad f(x),\ \frac{h}{1} f'(x),\ \frac{h^2}{1.2} f''(x),\ \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x),\ \text{etc}\ldots$$

jedesmal convergent, wenn der Zahlenwerth oder der Modulus von h kleiner ist als $\frac{1}{\Phi}$, und divergent, so oft der Zahlenwerth oder der Modulus von h größer ist als $\frac{1}{\Phi}$.

Beispiele. Setzt man für $f(x)$ eine der drei Functionen:

$$e^x,\ \cos x,\ \sin x,$$

so findet man $\Phi = 0$, $\frac{1}{\Phi} = \infty$. Folglich bleibt die Reihe (64) für alle endlichen, reellen oder imaginären Werthe der Constante h convergent, wie solches schon bemerkt worden.

Setzt man für $f(x)$ eine der Functionen:

$$l(x),\ x^\mu,$$

so findet man, wenn man den Zahlenwerth der reellen Veränderlichen x durch r bezeichnet:

$$\Phi = \frac{1}{r},\ r = \frac{1}{\Phi}.$$

Folglich ist die Reihe (64) convergent, so lange der Zahlenwerth oder der Modulus von h kleiner ist als der Zahlenwerth von x, was ebenfalls schon bekannt war.

Lehrsatz 6. Wenn alles wie im vorigen Lehrsatze bleibt, aber die Function $f(x)$ nebst der Constante h

reell ist, θ eine kleinere Zahl als 1, ψ_n den Zahlenwerth eines der Ausdrücke:

$$(65)\quad \frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{1.2.3\ldots n},\qquad (66)\ \frac{(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(x+\theta h)}{1.2.3\ldots(n-1)},$$

und Ψ die Grenze bezeichnet, gegen welche die größten Werthe von $(\psi_n)^{\frac{1}{n}}$ convergiren, oder vielmehr die einzige Grenze des Verhältnisses $\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}$, wenn diese Grenze existirt; so ist die Taylorsche Reihe:

$$(67)\ f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)+\text{etc}\ldots$$

für jeden reellen Werth von h richtig, welchem ein zwischen den Grenzen -1, $+1$ liegender Werth des Productes Ψh entspricht.

Zusatz 1. Die Formel (67) findet statt für alle zwischen den Grenzen $-\frac{1}{\Phi}$, $+\frac{1}{\Phi}$ liegende reelle Werthe von h, wenn einer der Ausdrücke:

$$(68)\quad \frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{f^{(n)}(x)},\qquad (69)\quad \frac{(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(x+\theta h)}{f^{(n)}(x)}$$

für jeden dieser Werthe einen endlichen Werth behält, während n unbestimmt groß wird. Dieses läßt sich leicht durch ähnliche Schlüsse, wie die im Zusatz 1 des Lehrsatzes 4 beweisen.

Beispiele. Setzt man für $f(x)$ nach einander die beiden Functionen:

$$l(x),\ x^{\mu},$$

so folgt aus dem vorhergehenden Zusatze, daß die Formeln (54) und (55) der Vorlesung 9 in dem Falle subsistiren, wo der Zahlenwerth von h kleiner ist als der von x.

Man könnte glauben, daß die Maclaurinsche Reihe, wenn sie convergent ist, immer $f(x)$ zur Summe habe, und daß in dem Falle, wo ihre verschiedenen Glieder nach einander verschwinden, die Function $f(x)$ auch verschwinde. Um sich aber vom Gegentheile zu überzeugen, braucht man nur zu bemerken, daß die zweite Erwartung nicht erfüllt wird, wenn man:

$$(70)\qquad f(x)=e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2},$$

und die erste nicht, wenn man:

$$(71)\qquad f(x)=e^{-x^2}+e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2},$$

setzt.

Denn die Function $e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$ ist nicht identisch Null, und die aus der ersten Voraussetzung abgeleitete Reihe hat nicht das Binom $e^{-x^2} + e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$ zur Summe, sondern nur das erste Glied e^{-x^2} desselben. Dieselben Bemerkungen lassen sich auf die Taylorsche Reihe anwenden.

Uebrigens sieht man leicht ein, daß die reelle oder imaginäre Function $f(x)$ nur alsdann die Summe einer nach den steigenden Potenzen von x geordneten Reihe sein kann, wenn diese Reihe mit der Maclaurinschen übereinstimmt. Denn es sei:

$$(72) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{etc}\ldots,$$

so findet man, wenn man diese Gleichung mehrere Male nach x differenzirt, und erwägt, daß die Gleichung (12) der dritten Vorlesung auch in dem Falle statt findet, wo das aus einer unendlichen Anzahl von Gliedern bestehende Polynom $au + bv + cw + \ldots$ die Summe einer convergirenden Reihe wird:

$$(73) \left\{ \begin{array}{l} f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \text{etc}\ldots \\ f''(x) = 1.2 a_2 + 1.2.3 a_3 x + \text{etc}\ldots \\ f'''(x) = 1.2.3.\, a_3 + \text{etc}\ldots \\ \quad \text{etc}\ldots \end{array} \right.$$

Setzt man dann $x = 0$, so ergibt sich aus den Gleichungen (72) und (73):

$$(74) \; f(0) = a_0,\; f'(0) = a_1,\; f''(0) = 1.2.\, a_2,\; f'''(0) = 1.2.3.\, a_3,\; \text{etc}\ldots$$

also:

$$a_0 = f(0),\; a_1 = \frac{1}{1.} f'(0),\; a_2 = \frac{1}{1.2} f''(0),\; a_3 = \frac{1}{1.2.3} f'''(0), \text{etc}\ldots$$

Substituirt man nun die vorhergehenden Werthe von a_0, a_1, a_2, a_3, etc..., so kommt man offenbar wieder auf die Gleichung (51).

Auf dieselbe Weise ließe sich zeigen, daß die Function $f(x+h)$ nur in sofern die Summe einer nach den steigenden Potenzen von h geordneten, convergirenden Reihe sein kann, als diese Reihe mit der Taylorschen übereinstimmt.

---

*) Gauß hat in der Abhandlung: Disquisitiones generales circa seriem infinitam:

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2} \cdot \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2.3} \cdot \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \ldots$$

über das Abnehmen und Wachsen der Glieder einer Reihe und über die Convergenz oder Divergenz derselben ebenfalls sehr wichtige Sätze aufgestellt.
Anmerk. d. Uebers.

Elfte Vorlesung.

Von den Werthen, welche die Functionen einer einzigen veränderlichen Größe bekommen, wenn diese Veränderliche imaginär wird.

Wenn die in einer gegebenen Function enthaltenen, zuvörderst als reell betrachteten Constanten oder Veränderlichen hierauf als imaginär angenommen werden; so kann die Bezeichnung, durch welche man diese Function ausdrückte, nur vermöge einer neuen Uebereinkunft, welche zur Bestimmung der Bedeutung dieser Bezeichnung in der neuen Hypothese geeignet ist, im Calcul beibehalten werden. Betrachtet man die zur Darstellung der einfachen Functionen dienenden Bezeichnungen:

$$a+x,\ a-x,\ ax,\ \frac{a}{x},\ x^a,\ A^x,\ L(x),$$

$$\sin x,\ \cos x,\ \text{arc.}\sin x,\ \text{arc.}\cos x,$$

so braucht man zur Bestimmung ihrer Bedeutung in dem Falle, wo die Veränderliche x imaginär wird, nur auf die in der algebraischen Analysis (Cap. VII, VIII und IX) entwickelten Sätze zurückzugehen, welche hier kurz wieder in Erinnerung gebracht werden sollen.

Jeder Ausdruck von der Form:

$$p+q\sqrt{-1},$$

wo p und q zwei reelle Größen bezeichnen, heißt ein imaginärer Ausdruck. Ein solcher Ausdruck hat, wie $\sqrt{-1}$, an und für sich keine Bedeutung. Verbindet man aber imaginäre Ausdrücke durch Addition, Subtraction, Multiplication etc... mit einander, und operirt mit $\sqrt{-1}$, wie mit einer reellen Größe, deren Quadrat $=-1$ ist; so erhält man neue imaginäre Ausdrücke zum Resultate, und es kann von Nutzen sein, die Relationen anzugeben, welche zwischen den reellen Größen der gegebenen imaginären Ausdrücke und den reellen Größen der aus ihrer Verbindung hervorgehenden imaginären Ausdrücke statt finden. Um diese Relationen leichter wieder aufzufinden, ist man übereingekommen, zwei ima-

ginäre Ausdrücke:

$$p+q\sqrt{-1},\ P+Q\sqrt{-1},$$

als gleich zu betrachten: 1) wenn die reellen Theile p und P, 2) wenn die Coefficienten von $\sqrt{-1}$, d. h. q und Q, einander gleich sind. Hiernach ist jede imaginäre Gleichung nur ein symbolischer Ausdruck zweier Gleichungen zwischen reellen Größen. Z. B. die symbolische Gleichung:

$$(1)\quad \cos(\alpha+\beta)+\sqrt{-1}\sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha.\cos\beta-\sin a\sin\beta$$
$$+(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)\sqrt{-1},$$

in welcher α, β zwei reelle Bogen bezeichnen, ist dasselbe, als die beiden reellen Gleichungen:

$$(2)\quad \begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos a.\end{cases}$$

Wenn in dem imaginären Ausdrucke:

$$p+q\sqrt{-1},$$

der Coefficient q von $\sqrt{-1}$ verschwindet, so wird das Glied $q\sqrt{-1}$ als auf Null reducirt angesehen, und der Ausdruck selbst auf die reelle Größe p. Hiernach begreifen die imaginären Ausdrücke die reellen Größen als besondere Fälle unter sich.

Die imaginären Ausdrücke können ebensowohl, als die reellen Größen den verschiedenen Operationen der Algebra unterworfen werden. Verrichtet man insbesondere die Addition, Subtraction oder Multiplication zweier oder mehrerer imaginärer Ausdrücke nach denselben Regeln, wie bei reellen Größen; so erhält man einen neuen imaginären Ausdruck zum Resultate, welcher die Summe, Differenz oder das Product der gegebenen Ausdrücke genannt wird, und man bedient sich der gewöhnlichen Bezeichnungen, um diese Summe, diese Differenz oder dieses Product anzudeuten. Es ist z. B.:

$$(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)(\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$+(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)\sqrt{-1},$$

woraus folgt, daß die Gleichung (1) folgendergestalt geschrieben werden kann:

$$(3)\quad \cos(\alpha+\beta)+\sqrt{-1}\sin(a+\beta)$$
$$=(\cos a+\sqrt{-1}\sin a)(\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta).$$

Multiplicirt man diese letzte Gleichung durch neue Factoren von der Form $\cos\gamma+\sqrt{-1}\sin\gamma,\ldots$ so findet man im Allgemeinen:

$$(4)\quad \begin{cases}\cos(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)+\sqrt{-1}\sin(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)=\\ (\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)(\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta)(\cos\gamma+\sqrt{-1}\sin\gamma)\ldots\end{cases}$$

für jede beliebige Anzahl reeller Bogen α, β, $\gamma\ldots$

Bezeichnet man durch a eine reelle Constante, und durch x eine imaginäre Veränderliche oder von der Form $p+q\sqrt{-1}$; so müssen zur Darstellung der imaginären Ausdrücke:

$$(5)\quad a+p+q\sqrt{-1},\ a-p-q\sqrt{-1},\ ap+aq\sqrt{-1}$$

die Bezeichnungen:

$$(6)\quad a+x,\ a-x,\ ax$$

angewandt werden.

Wenn die Constante a imaginär oder von der Form $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ wäre, so wären die durch die Bezeichnungen (6) dargestellten imaginären Ausdrücke respective:

$$(7)\ \alpha+p+(\beta+q)\sqrt{-1},\alpha-p+(\beta-q)\sqrt{-1},\alpha p-\beta q+(\alpha q+\beta p)\sqrt{-1}.$$

Das Product zweier conjugirter imaginärer Ausdrücke, d. h. solcher, welche sich bloß durch das Zeichen des Coefficienten von $\sqrt{-1}$ unterscheiden, reducirt sich, wie schon in der vorigen Vorlesung bemerkt worden, auf das Quadrat des gemeinschaftlichen Modulus, weil

$$(8)\quad (p+q\sqrt{-1})(p-q\sqrt{-1})=p^2+q^2$$

ist.

Setzt man $p=\cos\alpha$, $q=\sin\alpha$, so findet man:

$$(9)\ (\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)(\cos\alpha-\sqrt{-1}\sin\alpha)=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$$

Einen imaginären Ausdruck durch einen zweiten dividiren, heißt einen dritten imaginären Ausdruck finden, welcher, mit dem zweiten multiplicirt, den ersten wieder gibt. Das Resultat dieser Operation ist der Quotient der beiden gegebenen Ausdrücke, und um denselben anzudeuten, bedient man sich des gewöhnlichen Zeichens der Division. Diesem gemäß ergibt sich leicht aus der Gleichung (8), wenn a eine imaginäre Constante und x eine imaginäre Veränderliche, d. h. von der Form $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ und $p+q\sqrt{-1}$ bezeichnet, daß die Bezeichnungen:

$$(10)\quad \frac{1}{x} \text{ und } \frac{a}{x}$$

zur Darstellung der beiden imaginären Ausdrücke:

$$(11)\ \frac{p}{p^2+q^2}-\frac{q}{p^2+q^2}\sqrt{-1} \text{ und } \frac{\alpha p+\beta q}{p^2+q^2}+\frac{\beta p-\alpha q}{p^2+q^2}\sqrt{-1}$$

angewandt werden müssen.

In dem besondern Falle, wo der Werth von x von der Form ist:

$$x=\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha,$$

folgt aus der Gleichung (9):

$$(12)\quad \frac{1}{\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha}=\cos\alpha-\sqrt{-1}\sin\alpha.$$

Es ist eine merkwürdige Eigenschaft jedes imaginären Ausdruckes, daß er auf die Form:

$$r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t),$$

wo r eine positive Zahl und t einen reellen Bogen bezeichnet, gebracht werden kann. Denn bildet man die identische Gleichung:

$$(13) \qquad r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t) = p + q\sqrt{-1},$$

oder was dasselbe ist, die beiden reellen Gleichungen:

$$(14) \qquad r\cos t = p,\ r\sin t = q,$$

so folgt:

$$p^2 + q^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2$$

$$(15) \qquad r = \sqrt{p^2 + q^2};$$

und nachdem man auf diese Weise gefunden hat, daß die Zahl r mit dem Modulus des imaginären Ausdruckes $p + q\sqrt{-1}$ übereinstimmen muß; so ist nur noch übrig, um den Gleichungen (14) vollständig Genüge zu leisten, einen Bogen t zu finden, dessen Cosinus und Sinus durch

$$(16) \qquad \cos t = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}},\ \sin t = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

ausgedrückt wird.

Aus den Formeln (16) folgt die Gleichung:

$$(17) \qquad \tang t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{q}{p}$$

deren kleinste Wurzel (ohne Rücksicht auf das Zeichen) der durch arc. tang $\frac{q}{p}$ bezeichnete Bogen ist. Es sei:

$$(18) \qquad \tau = \text{arc. tang}\,\frac{q}{p}$$

derselbe Bogen, welcher nothwendig zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$ liegt, so ist:

$$\frac{q}{p} = \tang \tau = \frac{\sin \tau}{\cos \tau}.$$

$$(19) \qquad \frac{\cos \tau}{p} = \frac{\sin \tau}{q} = \pm\frac{\sqrt{\cos^2\tau + \sin^2\tau}}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}};$$

und da der Cosinus des Bogens τ nur eine positive Größe sein kann, so leuchtet ein, daß sich die Formel (19), wenn p positiv

ist, auf:

$$(20)\qquad \frac{\cos\tau}{p}=\frac{\sin\tau}{q}=\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

und wenn p negativ ist, auf:

$$(21)\qquad \frac{\cos\tau}{p}=\frac{\sin\tau}{q}=-\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

reduciren muß.

Setzt man also $p>0$, so ist:

$$(22)\qquad \cos\tau=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}},\ \sin\tau=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

und da alsdann aus der Gleichung (16) folgt:

$$(23)\qquad \cos t=\cos\tau,\ \sin t=\sin\tau;$$

so ist der allgemeine Werth von t offenbar:

$$(24)\qquad t=\tau\pm 2k\pi,$$

wo k eine beliebige ganze Zahl ist. Setzt man im Gegentheil p negativ, so findet man:

$$(25)\qquad \cos\tau=-\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}},\ \sin\tau=-\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

und da die Formeln (16) sich in diesem Falle in:

$$(26)\qquad \cos t=-\cos\tau,\ \sin t=-\sin\tau$$

verwandeln; so ist der Werth von t allgemein:

$$(27)\qquad t=\tau\pm(2k+1)\pi.$$

Ferner ist noch zu bemerken, daß man nach den Formeln (15) und (22) oder (25) für $p>0$:

$$(28)\qquad p+q\sqrt{-1}=r(\cos\tau+\sqrt{-1}\sin\tau),$$

und für $p<0$:

$$(29)\qquad p+q\sqrt{-1}=-r(\cos\tau+\sqrt{-1}\sin\tau),$$

hat.

Einen imaginären Ausdruck zur $m$ten Potenz erheben (wenn m eine ganze Zahl bezeichnet), heißt ein Product von m Factoren, jeder gleich diesem Ausdrucke, bilden. Man deutet die $m$te Potenz von $x=p+q\sqrt{-1}$ durch x^m an. Ist größerer Bequemlichkeit wegen der Werth von x unter der Form:

$$(30)\qquad x=r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)$$

ausgedrückt, so läßt sich der Werth von x^m leicht aus den obigen

Sätzen herleiten, und wird durch die Gleichung gegeben:

$$(31) \qquad x^m = r^m(\cos m t + \sqrt{-1} \sin m t).$$

In dem besondern Falle, wo die Constante p positiv ist, kann man $t = \tau$ setzen, und es ist folglich:

$$(32) \qquad x^m = r^m(\cos m\tau + \sqrt{-1} \sin m\tau),$$

wo die Werthe der Constanten r und τ durch die Gleichungen (15) und (18) gegeben werden.

Die n^{te} Wurzel aus dem imaginären Ausdrucke $p + q\sqrt{-1}$ ziehen, oder denselben zur Potenz des Grades $\frac{1}{n}$ erheben, heißt einen neuen imaginären Ausdruck bilden, dessen n^{te} Potenz $= p + q\sqrt{-1}$ ist. Da diese Aufgabe, wie wir sogleich sehen werden, mehrere Auflösungen gestattet, so folgt, daß der imaginäre Ausdruck x mehrere Wurzeln des n^{ten} Grades hat. In dem Falle, wo die Constante p positiv ist, ist eine dieser Wurzeln offenbar der imaginäre Ausdruck, welchen man erhält, wenn man im zweiten Theile der Gleichung (32) $\frac{1}{n}$ für m setzt, weil alsdann:

$$\left\{ r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\tau}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\tau}{n}\right)\right\}^n = r(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau) = x$$

ist.

Diese Wurzel wollen wir durch $x^{\frac{1}{n}}$ bezeichnen, so daß man für $p > 0$ hat:

$$(33) \qquad x^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\tau}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\tau}{n}\right).$$

Wird ferner irgend eine der Wurzeln des n^{ten} Grades von x ohne Unterschied durch $[(x)]^{\frac{1}{n}}$ bezeichnet, so ist für $p > 0$:

$$(34) \qquad x = r(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau),$$

folglich:

$$(35) \qquad [(x)]^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\tau}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\tau}{n}\right)[(1)]^{\frac{1}{n}};$$

und für $p < 0$:

$$(36) \qquad x = -r(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau),$$

folglich:

$$(37) \qquad [(x)]^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\tau}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\tau}{n}\right)[(-1)]^{\frac{1}{n}}.$$

Denn es ist leicht einzusehen, daß man, wenn der zweite Theil der Gleichung (35) oder (37) zur n^{ten} Potenz erhoben wird, den zweiten Theil der Gleichung (34) oder (36) wieder erhält. Um

sich übrigens zu überzeugen, daß die Formeln (35), (37) alle Wurzeln von $[(x)]^{\frac{1}{n}}$ geben, braucht man nur zu bemerken, daß, wenn

$$(38) \qquad \frac{[(x)]^{\frac{1}{n}}}{r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\tau}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{\tau}{n}\right)}=u$$

gesetzt wird, für $p>0$:

$$(39) \qquad u^n=\frac{x}{x}=1,\ u=[(1)]^{\frac{1}{n}},$$

und für $p<0$:

$$(40) \qquad u^n=-\frac{x}{x}=-1,\ u=[(-1)]^{\frac{1}{n}}$$

ist.

Was die allgemeinen Werthe von $[(1)]^{\frac{1}{n}}$ und $[(-1)]^{\frac{1}{n}}$ anlangt, so erhält man sie, wenn man die Werthe von $x=r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)$ sucht, welche 1) der Gleichung:

$$(41) \qquad x^n=r^n(\cos nt+\sqrt{-1}\sin nt)=1,$$

und 2) der Gleichung:

$$(42) \qquad x^n=r^n(\cos nt+\sqrt{-1}\sin nt)=-1$$

Genüge leisten.

Nun wird aber der Gleichung (41) offenbar Genüge geleistet, wenn man

$$r^n=1,\ r=1,$$

$$\cos nt+\sqrt{-1}\sin nt=1,\ \cos nt=1,\ \sin nt=0,$$

$$nt=\pm 2k\pi,\ t=\pm\frac{2k\pi}{n}$$

setzt, wo k eine beliebige ganze Zahl ist; während der Gleichung (42) Genüge geschieht, wenn man setzt:

$$r^2=1,\ r=1,$$

$$\cos nt+\sqrt{-1}\sin nt=-1,\ \cos nt=-1,\ \sin nt=0,$$

$$nt=\pm(2k+1)\pi,\ t=\pm\frac{(2k+1)\pi}{n}.$$

Es ist folglich allgemein:

$$(43) \qquad [(1)]^{\frac{1}{n}}=\cos\frac{2k\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n},$$

und:

$$(44) \qquad [(-1)]^{\frac{1}{n}}=\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}.$$

Es ist wohl zu bemerken, daß die Gleichungen (43), (44) für jeden der Ausdrücke $[(1)]^{\frac{1}{n}}$, $[(-1)]^{\frac{1}{n}}$ nur n verschiedene Werthe geben, welche man erhält, wenn man für k successive die verschiedenen ganzen Zahlen setzt, welche zwischen den Grenzen 0, $\frac{n}{2}$ liegen. (Algebr. Analysis, Cap. VII.)

Außer den ganzen Potenzen und Wurzeln der imaginären Ausdrücke kommen oft ihre gebrochenen oder negativen Potenzen in Betrachtung. Diese letztern entspringen aus ähnlichen Operationen, wie die gebrochenen oder negativen Potenzen reeller Größen. Um z. B. den imaginären Ausdruck $x = p + q\sqrt{-1}$ auf die Potenz des Grades $\frac{m}{n}$ zu erheben, muß man, wenn $\frac{m}{n}$ auf die einfachste Form gebracht ist, 1) die n^{te} Wurzel aus dem gegebenen Ausdrucke ziehen, 2) diese Wurzel auf die ganze Potenz des Grades m erheben. Da die Aufgabe auf mehrere Arten gelöst werden kann, so wollen wir irgend eine der Potenzen des Grades $\frac{m}{n}$ von x ohne Unterschied durch $[(x)]^{\frac{m}{n}}$ bezeichnen. Hiernach findet man, wenn man die beiden Theile der Gleichung (35) und (37) zur m^{ten} Potenz erhebt, 1) für $p > 0$:

$$(45)\qquad [(x)]^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m}{n}\tau + \sqrt{-1}\sin\frac{m}{n}\tau\right)[(1)]^{\frac{m}{n}},$$

2) für $p < 0$:

$$(46)\qquad [(x)]^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m}{n}\tau + \sqrt{-1}\sin\frac{m}{n}\tau\right)[(-1)]^{\frac{m}{n}}.$$

Was die verschiedenen Werthe von $[(1)]^{\frac{m}{n}}$ oder $[(-1)]^{\frac{m}{n}}$ betrifft, so werden sie leicht gefunden, wenn man die beiden Theile der Gleichung (43) oder (44) zur m^{ten} Potenz erhebt, woraus folgt, daß sie mit den verschiedenen Werthen von $[(1)]^{\frac{1}{n}}$ oder $[(-1)]^{\frac{1}{n}}$ zusammenfallen. (Siehe algebr. Analys., Cap. VII). Noch wollen wir bemerken, daß man, wenn p positiv ist, einen besondern Werth von $[(x)]^{\frac{m}{n}}$ erhält, wenn man die beiden Theile der Gleichung (33) auf die m^{te} Potenz erhebt. Dieser besondere Werth, welcher aus der Gleichung (45) hergeleitet wird, wenn man $[(1)]^{\frac{m}{n}} = 1$ setzt, soll durch $x^{\frac{m}{n}}$ bezeichnet werden, so daß:

$$(47)\qquad x^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m}{n}\tau + \sqrt{-1}\sin\frac{m}{n}\tau\right)$$

ist.

Einen imaginären Ausdruck x auf die negative Potenz des Grades $-m$, oder $-\frac{1}{n}$, oder $-\frac{m}{n}$ erheben, heißt: die Einheit durch die Potenz des Grades m, oder $\frac{1}{n}$, oder $\frac{m}{n}$ dividiren. Da die Aufgabe im ersten Falle nur eine Auflösung, und in jedem der beiden andern Fälle mehrere Auflösungen zuläßt; so soll die Potenz des Grades $-m$ bloß durch x^{-m} angedeutet werden, während die Bezeichnungen $[(x)]^{-\frac{1}{n}}$ oder $[(x)]^{-\frac{m}{n}}$ irgend eine der Potenzen des Grades $-\frac{1}{n}$, oder $-\frac{m}{n}$ ausdrücken sollen. Endlich soll durch $x^{-\frac{1}{n}}$ oder $x^{-\frac{m}{n}}$ der Quotient der Division der Einheit durch die Potenz $x^{\frac{1}{n}}$ oder $x^{\frac{m}{n}}$ angedeutet werden. Hiernach ergibt sich aus den Formeln (31), (45), (46) und (47)

1) für jedes Zeichen von p:

$$(48)\qquad x^{-m} = r^{-m}(\cos m t - \sqrt{-1}\sin m t);$$

2) wenn p positiv ist:

$$(49)\qquad [(x)]^{-\frac{m}{n}} = r^{-\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m}{n}\tau - \sqrt{-1}\sin\frac{m}{n}\tau\right)[(1)]^{-\frac{m}{n}},$$

$$(50)\qquad x^{-\frac{m}{n}} = r^{-\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m}{n}\tau - \sqrt{-1}\sin\frac{m}{n}\tau\right);$$

3) wenn p negativ ist:

$$(51)\qquad [(x)]^{-\frac{m}{n}} = r^{-\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m}{n}\tau - \sqrt{-1}\sin\frac{m}{n}\tau\right)[(-1)]^{-\frac{m}{n}}.$$

Die verschiedenen Werthe von $[(1)]^{-\frac{m}{n}}$ oder $[(-1)]^{-\frac{m}{n}}$ fallen offenbar mit denen von $[(1)]^{\frac{1}{n}}$ oder von $[(-1)]^{\frac{1}{n}}$ zusammen.

Aus den Formeln (32), (33), (47) und (50) folgt, daß, wenn a eine positive, negative, ganze oder gebrochene Größe bezeichnet, für $x = p + q\sqrt{-1}$ und $p > 0$, immer

$$(52)\qquad x^a = r^a(\cos a\tau + \sqrt{-1}\sin a\tau)$$

ist.

Da diese letzte Gleichung immer statt findet, der Zahlenwerth der Constante a mag ganz oder gebrochen sein, so führt die Analogie darauf, sie auch auf den Fall auszudehnen, wo der numerische Werth von a irrational wird. Alsdann dient die gedachte Gleichung zur Bestimmung der Bedeutung der Bezeichnung x^a; aber man kann die Bezeichnungen $[(1)]^a$, $[(x)]^a$ nicht mehr im Calcul beibehalten, wofern man sie nicht als eine endliche Menge imaginärer Ausdrücke darstellend betrachtet.

Wenn die Größe p negativ wird, so läßt sich nicht mehr erkennen, selbst wenn der Zahlenwerth von a gebrochen angenommen wird, welches derjenige von den Werthen des Ausdruckes $[(x)]^a$ ist, den man von den übrigen unterscheiden, und durch x^a bezeichnen könnte (Siehe Exercices de Mathématiques. Année 1826 art. 1). Da aber $-p$ alsdann eine positive Größe ist, so ergibt sich für irgend einen reellen Werth der Constante a:

$$(53)\qquad (-x)^a = x^a (\cos a\pi + \sqrt{-1}\sin a\pi).$$

Ferner ist, wenn a irgend welche positive oder negative, ganze oder gebrochene Größe bezeichnet, für $p > 0$:

$$(54)\qquad [(x)]^a = x^a [(1)]^a;$$

$$(55)\qquad [(1)]^a = \cos 2ka\pi + \sqrt{-1}\sin 2ka\pi,$$

und für $p < 0$:

$$(56)\qquad [(x)]^a = (-x)^a [(-1)]^a;$$

$$(57)\qquad [(-1)]^a = \cos[(2k+1)a\pi] + \sqrt{-1}\sin[(2k+1)a\pi].$$

Betrachten wir nun die sechs Bezeichnungen:

$$(58)\qquad \begin{cases} A^x,\ \sin x,\ \cos x, \\ L(x),\ \text{arc.}\sin x,\ \text{arc.}\cos x. \end{cases}$$

Gibt man der Veränderlichen x reelle Werthe, so drücken diese sechs Bezeichnungen ebensoviel reelle Functionen von x aus, wovon in jedem Paare die eine das Umgekehrte der andern ist, d. h. durch entgegengesetzte Operationen gegeben wird, wofern jedoch, wenn A eine Zahl bezeichnet, L das Zeichen der Logarithmen in dem Systeme von der Basis A ist. Es ist nun noch übrig, den Sinn dieser Bezeichnungen in dem Falle zu fixiren, wo die Veränderliche imaginär wird, welches sogleich geschehen soll, indem mit den drei ersten der Anfang gemacht wird.

Es ist bewiesen worden, daß die drei Functionen:

$$A^x,\ \sin x,\ \cos x,$$

in dem Falle, wo die Veränderliche x reell ist, immer in convergirende, nach den steigenden und ganzen Potenzen der Veränderlichen geordnete Reihen entwickelt werden können. Denn es ist in dieser Voraussetzung (Vorl. 9):

$$(59)\qquad A^x = 1 + \frac{x}{1}l(A) + \frac{x^2}{1.2}[l(A)]^2 + \frac{x^3}{1.2.3}[l(A)]^3 + \text{etc.}$$

$$(60)\qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

(61) $$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc}\ldots,$$

wo das Zeichen l einen neperschen Logarithmus andeutet. Da ferner die eben wieder in Erinnerung gebrachten Reihen, nach Vorlesung 10, für alle reelle oder imaginäre Werthe der Veränderlichen x convergiren, so pflegt man die Gleichungen (59), (60) und (61) auf alle möglichen Fälle zu erstrecken, und sie als Hülfsmittel zur Bestimmung der Bedeutung der drei Bezeichnungen:

$$A^x,\ \cos x,\ \sin x,$$

selbst wenn die Veränderliche imaginär wird, zu betrachten.

Nun ist, wenn man in der Gleichung (59) $A = e$ setzt, (indem e die Basis des neperschen Logarithmen-Systems bezeichnet):

(62) $$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc}\ldots,$$

und wenn man für x successive

$$x\,l(A),\ x\sqrt{-1},\ -x\sqrt{-1}$$

setzt:

(63) $$e^{x\,l(A)} = 1 + \frac{x}{1}\,l(A) + \frac{x^2}{1.2}[l(A)]^2 + \frac{x^3}{1.2.3}[l(A)]^3 + \text{etc}\ldots$$

(64) $$\begin{cases} e^{x\sqrt{-1}} = 1 + \frac{x}{1}\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3}\sqrt{-1} + \text{etc}\ldots \\ e^{-x\sqrt{-1}} = 1 - \frac{x}{1}\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3}\sqrt{-1} + \text{etc}\ldots \end{cases}$$

Man hat also:

(65) $$e^{x\,l(A)} = A^x,$$

(66) $$\begin{cases} e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x, \\ e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\sin x, \end{cases}$$

und folglich:

(67) $$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},\quad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

wo die Veränderliche x reell oder imaginär sein kann.

Hiernach ist es leicht, die einem imaginären Werthe $p+q\sqrt{-1}$ der Veränderlichen x entsprechenden Werthe von e^x, A^x, $\sin x$ und $\cos x$ unter endlicher Form zu erhalten; und nach der Formel (67) der 9ten Vorlesung ist zuvörderst:

$$e^x = e^{p+q\sqrt{-1}} = 1 + p + q\sqrt{-1} + \frac{(p+q\sqrt{-1})^2}{1.2} + \frac{(p+q\sqrt{-1})^3}{1.2.3} + \text{etc}\ldots = e^p(\cos q + \sqrt{-1}\sin q).$$

Man hat also:

$$(68)\qquad e^x = e^p(\cos q + \sqrt{-1}\sin q).$$

Da ferner der Werth von e^x durch die Gleichung (68) bestimmt ist, so lassen sich die Werthe von

$$A^x,\ \cos x,\ \sin x,$$

unmittelbar aus den Formeln (65) und (67) ableiten, und man wird finden, daß diese Bezeichnungen zur Darstellung der imaginären Ausdrücke:

$$(70)\quad \left\{\begin{array}{l} A^p[\cos . q\, l(A) + \sqrt{-1}\sin q . l(A)], \\ \dfrac{e^q + e^{-q}}{2}\sin p + \dfrac{e^q - e^{-q}}{2}\cos p . \sqrt{-1}, \\ \dfrac{e^q + e^{-q}}{2}\cos p - \dfrac{e^q - e^{-q}}{2}\sin p . \sqrt{-1}, \end{array}\right.$$

angewandt werden müssen.

Auch kann die Gleichung (68) ausgedrückt werden durch:

$$(71)\qquad e^x = e^p . e^{q\sqrt{-1}}.$$

Vermittelst dieser letzten Gleichung und der Gleichungen (65), (66) kann man nun die bekannten Formeln, welche die Eigenschaften der Functionen e^x, A^x, $\sin x$, $\cos x$ ausdrücken, leicht auf beliebige imaginäre Werthe der Veränderlichen x, y ausdehnen. Man findet z. B.

$$(72)\qquad e^{x+y} = e^x . e^x,$$

$$(73)\qquad A^{x+y} = A^x . A^y.$$

$$(74)\quad \left\{\begin{array}{l} \sin(x+y) = \sin x . \cos y + \sin y \cos x \\ \cos(n+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \end{array}\right.$$

$$(75)\quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x,\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x,\ \text{etc.}\ldots$$

Suchen wir nun die verschiedenen reellen oder imaginären Werthe von x und y, durch welche die beiden Gleichungen:

$$(76)\qquad e^y = x;\qquad (77)\ A^z = x;$$

gelöst werden.

Diese Werthe sind die verschiedenen, 1) im neperschen, 2) im Systeme von der Basis A berechneten Logarithmen von x, welche durch eine der Bezeichnungen:

$$l[(x)],\quad L[(x)]$$

ausgedrückt werden.

Da ferner nach der Formel (65):

$$A^z = e^{z\, l(A)}$$

ist, so leuchtet ein, daß die Unbekannten y und z der Bedingungsgleichung:

$$y = z\,l(A) \text{ oder } z = \frac{y}{l(A)}$$

Genüge leisten müssen, so daß man hat:

$$(78) \qquad L[(x)] = \frac{l[(x)]}{l(A)}.$$

Um also die Logarithmen von x in dem Systeme von der Basis A zu erhalten, braucht man nur die neperschen Logarithmen derselben Veränderlichen durch l(A) zu dividiren, und man braucht mithin nur die Gleichung (76) aufzulösen.

Setzt man nun:

$$x = p + q\sqrt{-1} \text{ und } y = P + Q\sqrt{-1},$$

wo P, Q und p, q reelle Größen bezeichnen, so folgt aus der Gleichung (76):

$$e^{P+Q\sqrt{-1}} = e^{P}(\cos Q + \sqrt{-1}\sin Q) = p + q\sqrt{-1}.$$

Hieraus folgt ferner mit Rücksicht auf die Formel (28), 1) wenn $p > 0$ ist und k irgend welche ganze Zahl bezeichnet:

$$e^{P}(\cos Q + \sqrt{-1}\sin Q) = r(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau),$$

$$e^{P} = r,\ P = l(r),$$

$$\cos Q + \sqrt{-1}\sin Q = \cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau,\ \cos Q = \cos\tau,$$

$$\sin Q = \sin\tau,\ Q = \tau \pm 2k\pi,$$

2) nach der Formel (29) für $p < 0$:

$$e^{P}(\cos Q + \sqrt{-1}\sin Q) = -r(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau),$$

$$e^{P} = r,\ P = l(r),$$

$$\cos Q + \sqrt{-1}\sin Q = -(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau),\ \cos Q = -\cos\tau,$$

$$\sin Q = -\sin\tau,\ Q = \tau \pm (2k+1)\pi.$$

Man hat folglich für einen positiven Werth von p:

$$(79) \qquad l[(x)] = l(r) + \tau\sqrt{-1} \pm 2k\pi\sqrt{-1},$$

und für einen negativen Werth von p:

$$(80) \qquad l[(x)] = l(r) + \tau\sqrt{-1} \pm (2k+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Setzt man x = 1, oder x = −1, so folgt aus den Formeln (79) und (80):

$$(81) \qquad l[(1)] = \pm 2k\pi\sqrt{-1},$$

$$(82) \qquad l[(-1)] = \pm (2k+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Aus den vier letzten Gleichungen folgt 1) für $p > 0$:

(83) $$l[(x)] = l(r) + \tau\sqrt{-1} + l[(1)];$$

2) für $p < 0$:

(84) $$l[(x)] = l(r) + \tau\sqrt{-1} + l[(-1)].$$

In dem Falle, wo die Größe p positiv bleibt, ist der einfachste aller Logarithmen von x derjenige, welchen man erhält, wenn man in der Gleichung (79) $k = 0$, und in der Gleichung (83), $l[(1)] = 0$ setzt. Diesen Logarithmus, der sich für $q = 0$ auf den reellen Logarithmus von p reducirt, wollen wir durch die Bezeichnung $l(x)$ andeuten, so daß für $p > 0$:

(85) $$l(x) = l(r) + \tau\sqrt{-1}$$

ist.

Hiernach findet man offenbar für positive Werthe der Größe p:

(86) $$l[(x)] = l(x) + l[(1)],$$

und für negative Werthe von p:

(87) $$l[(x)] = l(-x) + l[(-1)].$$

Ferner, wenn p positiv ist, und für die doppelten Parenthesen im zweiten Theile der Gleichung (78) einfache gesetzt werden; so erhält man einen Werth von $L[(x)]$, welcher durch $L(x)$ bezeichnet werden soll, so daß man hat:

(88) $$L(x) = \frac{l(x)}{l(A)} = L(r) + \frac{\tau}{l(A)}\sqrt{-1}.$$

Wir wollen noch bemerken, daß die Bezeichnungen $L(x)$, $l(x)$ niemals gebraucht werden, wenn p negativ ist.

Nachdem wir die verschiedenen Logarithmen des imaginären Ausdruckes:

$$x = p + q\sqrt{-1}$$

berechnet haben, wollen wir die imaginären Bogen suchen, deren Sinus $= x$ ist. Bezeichnet man irgend einen dieser Bogen durch:

(89) $$\text{arc. sin}[(x)] = P + Q\sqrt{-1};$$

so hat man zur Bestimmung von $P + Q\sqrt{-1}$ die Gleichung:

(90) $$\sin(P + Q\sqrt{-1}) = x = p + q\sqrt{-1},$$

oder was dasselbe ist, die Gleichung:

$$\frac{e^Q + e^{-Q}}{2}\sin P + \frac{e^Q - e^{-Q}}{2}\cos P\sqrt{-1} = p + q\sqrt{-1},$$

welche in die beiden andern zerfällt:

$$(91)\qquad \frac{e^{Q}+e^{-Q}}{2}\sin P=p,\quad \frac{e^{Q}-e^{-Q}}{2}\cos P=q,$$

wofür man setzen kann:

$$(92)\qquad e^{Q}=\frac{p}{\sin P}+\frac{q}{\cos P},\quad e^{-Q}=\frac{p}{\sin P}-\frac{q}{\cos P}.$$

Eliminirt man Q zwischen den Gleichungen (92), so folgt daraus:

$$(93)\qquad \frac{p^2}{\sin^2 P}-\frac{q^2}{\cos^2 P}=1,$$

$$(94)\qquad \cos^4 P-(1-p^2-q^2)\cos^2 P-q^2=0,$$

und weil $\cos^2 P$ nothwendig eine positive Größe ist:

$$(95)\ \cos^2 P=\frac{1-p^2-q^2}{2}+\sqrt{\left\{\left(\frac{1-p^2-q^2}{2}\right)^2+q^2\right\}}$$

$$=\frac{q^2}{-\frac{1-p^2-q^2}{2}+\sqrt{\left\{\left(\frac{1-p^2-q^2}{2}\right)^2+q^2\right\}}}.$$

Man hat folglich:

$$(96)\ \sin^2 P=1-\cos^2 P=\frac{1+p^2+q^2}{2}-\sqrt{\left\{\left(\frac{1+p^2+q^2}{2}\right)^2-p^2\right\}},$$

oder:

$$(97)\ \sin^2 P=\frac{p^2}{\frac{1+p^2+q^2}{2}+\sqrt{\left\{\left(\frac{1+p^2+q^2}{2}\right)^2-p^2\right\}}},$$

und da nach der ersten der Gleichungen (91) sin P und p Größen von demselben Zeichen sein müssen; so findet man, wenn man aus beiden Theilen der Gleichung (97) die Quadratwurzel zieht:

$$(98)\ \sin P=\frac{p}{\left\{\frac{1+p^2+q^2}{2}+\sqrt{\left[\left(\frac{1+p^2+q^2}{2}\right)^2-p^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Setzt man nun der Bequemlichkeit wegen:

$$(99)\ \mathcal{P}=\text{arc.}\sin\frac{p}{\left\{\frac{1+p^2+q^2}{2}+\sqrt{\left[\left(\frac{1+p^2+q^2}{2}\right)^2-p^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

so folgt aus der Gleichung (98):

$$(100) \qquad P = \frac{\pi}{2} \pm \left(\mathcal{P} - \frac{\pi}{2}\right) \pm 2k\pi,$$

wo k irgend eine ganze Zahl bezeichnet; und aus der ersten der Gleichungen (92) folgt:

$$(101) \quad Q = 1\left(\frac{p}{\sin P} + \frac{q}{\cos P}\right) = 1\left(\frac{p}{\sin \mathcal{P}} \pm \frac{q}{\cos \mathcal{P}}\right).$$

Da überdieß die Gleichung (98) verificirt werden muß, wenn man darin

$$P = \frac{\pi}{2} \pm \left(\mathcal{P} - \frac{\pi}{2}\right) \pm 2k\pi$$

setzt, so folgt daraus:

$$(102) \quad \frac{p^2}{\sin^2 \mathcal{P}} - \frac{q^2}{\cos^2 \mathcal{P}} = \left(\frac{p}{\sin \mathcal{P}} + \frac{q}{\cos \mathcal{P}}\right)\left(\frac{p}{\sin \mathcal{P}} - \frac{q}{\cos \mathcal{P}}\right) = 1,$$

und folglich:

$$(103) \qquad 1\left(\frac{p}{\sin \mathcal{P}} - \frac{q}{\cos \mathcal{P}}\right) = -1\left(\frac{p}{\sin \mathcal{P}} + \frac{q}{\cos \mathcal{P}}\right).$$

Hieraus folgt, daß der Werth von Q unter der Form:

$$(104) \qquad Q = \pm 1\left(\frac{p}{\sin \mathcal{P}} + \frac{q}{\cos \mathcal{P}}\right)$$

ausgedrückt werden kann.

Es muß hierbei wohl bemerkt werden: 1) daß man in der Gleichung (104) das doppelte Zeichen $\pm$ immer auf dasjenige reduciren muß, womit das Binom $\left(\mathcal{P} - \frac{\pi}{2}\right)$ in der Gleichung (100) behaftet ist; 2) daß der für Q gefundene Werth ebensowohl aus der zweiten der Gleichungen (92) abgeleitet werden könnte, als aus der ersten. Substituirt man diesen Werth von Q nebst dem allgemeinen Werthe von P in die Gleichung (89), und setzt der Kürze wegen:

$$(105) \qquad \mathcal{Q} = 1\left(\frac{p}{\sin \mathcal{P}} + \frac{q}{\cos \mathcal{P}}\right);$$

so hat man endlich:

$$(106) \quad \text{arc. sin}\,[(x)] = \frac{\pi}{2} \pm \left(\mathcal{P} + \mathcal{Q}\sqrt{-1} - \frac{\pi}{2}\right) \pm 2k\pi.$$

Unter den verschiedenen Werthen von arc. sin [(x)], welche die

vorhergehende Gleichung gibt, ist der einfachste der, welchen man erhält, wenn man $k=0$ und für das doppelte Zeichen des Trinoms $\mathcal{P}+\mathcal{Q}\sqrt{-1}-\frac{\pi}{2}$ das Zeichen $+$ setzt. Wir wollen denselben durch einfache Parenthesen andeuten, und folglich schreiben:

$$(107)\qquad \text{arc.}\sin(x)=\mathcal{P}+\mathcal{Q}\sqrt{-1},$$

oder auch, wenn man die Parenthesen ganz wegläßt:

$$(108)\qquad \text{arc.}\sin x=\mathcal{P}+\mathcal{Q}\sqrt{-1}.$$

Erwägt man anderer Seits, daß $\pm 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ irgend einen der Bogen bezeichnet, deren Sinus $=1$ ist, so erhellet leicht, daß man der Gleichung (106) die Form geben kann:

$$(109)\qquad \text{arc.}\sin[(x)]=\pm\left(\text{arc.}\sin x-\frac{\pi}{2}\right)+\text{arc.}\sin[(1)].$$

Die Größe $\mathcal{Q}$ läßt sich leicht als Function von p und q ausdrücken. Denn setzt man in den Formeln (98) und (95) $\mathcal{P}$ für P, so folgt daraus, wenn man bemerkt, daß $\cos\mathcal{P}$ wesentlich positiv ist:

$$(110)\qquad \begin{cases} \sin\mathcal{P}=\dfrac{p}{\left\{\dfrac{p^2+q^2+1}{2}+\sqrt{\left[\left(\dfrac{p^2+q^2+1}{2}\right)^2-p^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}}, \\[2ex] \cos\mathcal{P}=\dfrac{\sqrt{q^2}}{\left\{\dfrac{p^2+q^2-1}{2}+\sqrt{\left[\left(\dfrac{p^2+q^2+1}{2}\right)^2-p^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}}. \end{cases}$$

Mithin gibt die Gleichung (105):

$$(111)\qquad \mathcal{Q}=l\left\{\left(\frac{p^2+q^2+1}{2}+\sqrt{\left[\left(\frac{p^2+q^2+1}{2}\right)^2-p^2\right]}\right)^{\frac{1}{2}} +\frac{q}{\sqrt{q^2}}\left(\frac{p^2+q^2-1}{2}+\sqrt{\left[\left(\frac{p^2+q^2+1}{2}\right)^2-p^2\right]}\right)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

oder:

$$(112)\qquad \mathcal{Q}=\pm l\left\{\left(\frac{p^2+q^2+1}{2}+\sqrt{\left[\left(\frac{p^2+q^2+1}{2}\right)^2-p^2\right]}\right)^{\frac{1}{2}} +\left(\frac{p^2+p^2-1}{2}+\sqrt{\left[\left(\frac{p^2+q^2+1}{2}\right)^2-p^2\right]}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Für das doppelte Zeichen muß $+$ oder $-$ gesetzt werden, je=

nachdem $q=\sqrt{q^2}$ oder $q=-\sqrt{q^2}$, d. h. jenachdem die Größe q positiv oder negativ ist.

In dem besondern Falle, wo $q=0$ ist, geben die Formeln (99) und (112):

$$(113)\quad \begin{cases} \mathcal{P}=\text{arc. sin}\dfrac{p}{\left\{\dfrac{1+p^2}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{1-p^2}{2}\right)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}, \\ \mathcal{Q}=\pm l\left\{\left[\dfrac{p^2+1}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{1-p^2}{2}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \right. \\ \qquad \left. +\left[\dfrac{p^2-1}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{1-p^2}{2}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}. \end{cases}$$

Es ergibt sich also für $p^2<1$:

$$(114)\qquad \mathcal{P}=\text{arc. sin}\, p,\quad \mathcal{Q}=\pm l(1)=0,$$

und für $p^2>1$:

$$(115)\quad \begin{cases} \mathcal{P}=\text{arc. sin}\dfrac{p}{\sqrt{p^2}}=\text{arc. sin}(\pm 1), \\ \mathcal{Q}=\pm l(\sqrt{p^2}+\sqrt{p^2-1}). \end{cases}$$

In der ersten Hypothese reducirt sich die Formel (108) auf die identische Gleichung:

$$\text{arc. sin}\, p=\text{arc. sin}\, p,$$

wie zu erwarten war; und die Formel (106) verwandelt sich in:

$$(116)\qquad \text{arc. sin}\,[(p)]=\frac{\pi}{2}\pm\left(\text{arc. sin}\, p-\frac{\pi}{2}\right)\pm 2k\pi.$$

Im zweiten Falle hat die Größe $\mathcal{Q}$ nicht mehr einen einzigen Werth, sondern zwei gleiche Werthe von entgegengesetztem Zeichen, und der zweite Theil der Gleichung (108) ist folglich nicht mehr vollständig bestimmt. Man darf also die Bezeichnung arc. sin p alsdann nicht anwenden. Aber aus den Gleichungen (106) und (115) folgt

1) für $p>0$:

$$(117)\qquad \text{arc. sin}\,[(p)]=\frac{\pi}{2}\pm 2k\pi\pm\sqrt{-1}\,.\,l(p+\sqrt{p^2-1}),$$

2) für $p<0$:

$$(118)\qquad \text{arc. sin}\,[(p)]=\frac{\pi}{2}\pm(2k+1)\pi\pm\sqrt{-1}\,.\,l(-p+\sqrt{p^2-1}).$$

In dem besondern Falle, wo $p=0$ ist, geben die Formeln (99) und (112):

$$(119)\qquad \mathcal{P}=\text{arc. sin}(0)=0,\quad \mathcal{Q}=l(q+\sqrt{q^2+1}),$$

Folglich reduciren sich die Formeln (166) und (106) auf:

$$(120)\quad \text{arc. sin}\,[(q\sqrt{-1})] = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi \mp \left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{-1}\,l(q+\sqrt{q^2+1})\right),$$

$$(121)\qquad \text{arc. sin}\,(q\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\,l(q+\sqrt{q^2+1}).$$

Wir wollen nun die imaginären Bogen betrachten, deren Cosinus $x = p + q\sqrt{-1}$ ist. Bezeichnet man irgend welchen dieser Bogen durch:

$$(122)\qquad z = \text{arc. cos}\,[(x)],$$

so hat man zur Bestimmung von z die Gleichung:

$$(123)\qquad \cos z = x.$$

Ueberdies gibt die erste der Gleichungen (75):

$$(124)\qquad \cos z = \pm \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right).$$

Mithin kann die Gleichung (123) auch so geschrieben werden:

$$(125)\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = x,$$

und hieraus folgt:

$$(126)\qquad \frac{\pi}{2} - z = \text{arc. sin}\,[(x)].$$

Folglich werden die verschiedenen Werthe von $z = \text{arc. cos}\,[(x)]$ durch die Gleichung bestimmt:

$$(127)\qquad \text{arc. cos}\,[(x)] = \frac{\pi}{2} - \text{arc. sin}\,[(x)].$$

Unter diesen Werthen gibt es einen, welcher bemerkt zu werden verdient, und welchen man erhält, wenn man im zweiten Theile der Gleichung (127) für die doppelten Parenthesen einfache setzt. Wir wollen auch diesen Werth vermittelst einfacher Parenthesen bezeichnen, und folglich schreiben:

$$(128)\qquad \text{arc. cos}\,(x) = \frac{\pi}{2} - \text{arc. sin}\,(x),$$

oder indem man die Parenthesen ganz wegläßt:

$$(129)\qquad \text{arc. cos}\,x = \frac{\pi}{2} - \text{arc. sin}\,x.$$

Hiernach folgt offenbar aus der Gleichung (108):

$$(130)\qquad \text{arc. cos}\,x = \frac{\pi}{2} - \mathcal{P} - \mathcal{Q}\sqrt{-1}),$$

wo die Werthe von $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ wieder durch die Formeln (99) und (111) bestimmt werden. Ferner folgt aus der Formel (109) in Verbin-

dung mit den Formeln (127) und (129):

(131) $$\text{arc. cos}\,[(x)] = \pm\,\text{arc. cos}\,x \pm \text{arc. cos}\,(1).$$

Betrachten wir insbesondere den Fall, wo $q = 0$ ist. Setzt man alsdann $p^2 < 1$, so reducirt sich die Gleichung (130), wie zu erwarten war, auf die identische Gleichung:

$$\text{arc. cos}\,p = \text{arc. cos}\,p,$$

und die Formel (131) verwandelt sich in:

(132) $$\text{arc. cos}\,[(p)] = \pm 2k\pi \pm \text{arc. cos}\,p.$$

Wenn man im Gegentheil $p^2 > 1$ setzt, so bekömmt die Größe Q zwei gleiche Werthe von verschiedenen Zeichen, und man darf also die Bezeichnung arc. cos p nicht mehr gebrauchen. Aus den Formeln (117), (118) und (127) folgt indessen, 1) für $p > 0$:

(133) $$\text{arc. cos}\,[(p)] = \pm 2k\pi \mp \sqrt{-1}\,l(p + \sqrt{p^2 - 1});$$

2) für $p < 0$:

(134) $$\text{arc. cos}\,[(p)] = \mp(2k \pm 1)\pi \mp \sqrt{-1}\,.\,l(-p + \sqrt{p^2 - 1}).$$

In dem Falle, wo $p = 0$ gesetzt wird, folgt aus den Formeln (120), (121) und (127):

(135) $$\text{arc. cos}\,[(q\sqrt{-1})] = \mp 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{-1}\,l(q + \sqrt{p^2 - 1})\right),$$

(136) $$\text{arc. cos}\,(q\sqrt{-1}) = \frac{\pi}{2} - \sqrt{-1}\,l(b + \sqrt{q^2 + 1}).$$

In dem Vorhergehenden haben wir bemerkt, daß die Formeln (72), (73), (74), (75)..., welche die bekannten Eigenschaften der Functionen A^x, cos x, sin x... ausdrücken, auf beliebige imaginäre Werthe der Veränderlichen x, y ausgedehnt werden können. Betrachtet man hingegen Formeln, in welchen die umgekehrten Functionen:

$$l(x),\ L(x),\ \text{arc. sin}\,x,\ \text{arc. cos}\,x$$

vorkommen; so wird man sehr oft finden, daß diese Formeln, auf imaginäre Veränderliche erstreckt, nur mit wesentlichen Einschränkungen statt finden. Setzt man z. B.:

(137) $$x = p + q\sqrt{-1},\quad y = p_1 + q_1\sqrt{-1},\quad z = p_2 + q_2\sqrt{-1},\ \text{etc.}\ldots,$$

und bezeichnet mit a irgend eine reelle Größe; so gilt die bekannte Formel:

(138) $$L(x) + L(y) + L(z) + \ldots = L(xyz\ldots)$$

nur in dem Falle, wo p, p_1, p_2... positiv sind, und die

Summe:

(139) $$\text{arc. tang}\,\frac{q}{p} + \text{arc. tang}\,\frac{q_1}{p_1} + \text{arc. tang}\,\frac{q_2}{p_2} + \ldots$$

zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$ liegt; und die Gleichung:

(140) $$L(x^a) = a\,L(x),$$

in dem Falle, wenn das Product:

(141) $$a\,.\,\text{arc. tang}\,\frac{q}{p}$$

zwischen denselben Grenzen liegt. Setzt man ferner in der Gleichung (138) für die einfachen Parenthesen doppelte, so muß die dadurch erhaltene Formel:

(142) $$L[(xyz\ldots)] = L[(x)] + L[(y)] + L[(z)] + \text{etc.}.$$

als richtig angesehen werden, weil man jedem Werthe des zweiten Theiles einen gleichen Werth des ersten entsprechen lassen kann. Was den allgemeinen Werth von $L[(x^a)]$ anlangt, so ergibt er sich unmittelbar aus den beiden Gleichungen:

(143) $$\begin{cases} L[(x^a)] = \dfrac{l[(x^a)]}{l(A)}, \\ l[(x^a)] = l[(e^{a\,l(x)})] = a\,l(x) \pm 2k\pi\sqrt{-1}, \end{cases}$$

wenn k irgend eine ganze Zahl bezeichnet, und das Product (141) immer zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$ liegt.

Zum Schlusse dessen, was wir über die Werthe der einfachen Functionen der Veränderlichen x, wenn diese Veränderliche imaginär wird, zu sagen hatten, ist noch zu untersuchen übrig, was die Ausdrücke:

$$x^a,\ A^x,\ L(x),$$

werden, wenn die Constanten a, A aufhören, reell zu sein. Erstreckt man nun die Formel (52) auf den Fall, wo der reelle Theil von x positiv ist, und der Exponent a imaginär wird; so ist diese Formel offenbar zur Bestimmung des Sinnes der Bezeichnung x^a in dem gegenwärtigen Falle hinreichend. Diese Erweiterung der Formel (52) wollen wir in Zukunft als zulässig annehmen; aber die Bezeichnung x^a nicht gebrauchen, so oft der reelle Theil der Veränderlichen x negativ ist. Die Bezeichnung $[(x)]^a$ kann nicht mehr gebraucht werden, wenn der Exponent a imaginär wird, wofern man sie nicht als eine unendliche Anzahl imaginärer Ausdrücke darstellend ansieht.

Wir wollen nun annehmen, die Constante A erscheine unter der Form:

(144) $$A = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

wo α, β irgend welche Größen bezeichnen. Wenn die Größe α positiv ist, so genügt es in diesem Falle, um den Sinn der Bezeichnung A^x zu bestimmen, die Formel (65) noch als richtig anzunehmen. Setzt man nun der Kürze wegen:

$$(145) \qquad \rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \qquad \nu = \text{arc. tang} \frac{\beta}{\alpha},$$

so findet man:

$$A = \rho(\cos\nu + \sqrt{-1}\sin\nu), \; l(A) = l(\rho) + \nu\sqrt{-1},$$

$$A^x = e^{x\,l(\rho) + \nu x\sqrt{-1}} = e^{x\,l(\rho)} . e^{\nu x\sqrt{-1}},$$

und folglich:

$$(146) \qquad A^x = \rho^x(\cos\nu x + \sqrt{-1}\sin\nu x).$$

Dasselbe Resultat würde man erhalten, wenn man in der Formel (52) $A = \rho(\cos\nu + \sqrt{-1}\sin\nu)$ für $x = r(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau)$ und x für a setzte.

Wenn man im ersten Theile der Formel (65) $l[(A)]$ für $l(A)$ setzte, so würde der daraus resultirende Ausdruck:

$$e^{x\,l[(A)]}$$

eine unendliche Menge von Werthen darbieten, welche sich für jedes Zeichen des reellen Theiles der Constante A berechnen ließen. Wendet man also im Calcul die Bezeichnung $[(A)]^x$ an, so muß man sie als jeden dieser Werthe, d. h. als eine unendliche Menge imaginärer Ausdrücke darstellend betrachten.

Was die Bezeichnungen:

$$L(x), \; L[(x)]$$

betrifft, wo L einen Logarithmus in dem Systeme, dessen Basis A imaginär ist, andeutet; so bezeichnen sie nothwendig Werthe von z, welche der Gleichung (77) Genüge leisten, und folglich dürfen sie nur in dem Falle gebraucht werden, wo man von der Bezeichnung A^x Gebrauch machen kann, d. h., wenn der reelle Theil von A positiv ist. Uebrigens ist es leicht, sich zu versichern, daß in diesem Falle die Werthe der Bezeichnungen $L[(x)]$, $L(x)$ sich wie gewöhnlich aus den Formeln (78) und (88) ableiten lassen.

Es erhellet leicht, wie die bekannten Formeln, welche die Eigenschaften der Functionen x^a, A^x, $L(x)$ ausdrücken, modificirt werden müssen, wenn die Constanten a, A imaginär werden. Setzt man z. B.:

$$x = p + q\sqrt{-1}, \; y = p_1 + q_1\sqrt{-1}, \; z = p_2 + q_2\sqrt{-1}, \text{ etc.},$$

so ist die Formel (138) und die folgende:

$$(147) \qquad x^a . y^a . z^a \ldots = (x y z \ldots)^a$$

nur in dem Falle gültig, wo p, p_1, p_2, ... positiv sind, und die Summe (139) zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$ liegt. Da-

gegen gilt die Formel:

(148) $$A^x . A^y . A^z \ldots = A^{x+y+z+\ldots},$$

wenn der reelle Theil von A positiv ist, ohne alle Einschränkung für alle möglichen reellen oder imaginären Werthe der Veränderlichen x, y, z.... Ferner kann man sich leicht überzeugen, daß 1), wenn man

$$a = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad x = r(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau)$$

setzt, indem α, β, r reelle Größen, und τ einen zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$ liegenden Winkel bezeichnen, die Formel (140) nur in dem Falle statt findet, wo das Binom:

(159) $$\alpha\tau + \beta l(r)$$

zwischen denselben Grenzen liegt; 2) daß die Formel (142) für beliebige Werthe der Veränderlichen x, y, z..., und die Formeln (143) für alle Werthe von x gelten, welche einen reellen positiven Bestandtheil haben.

Nachdem die Werthe der einfachen Functionen einer Veränderlichen x bestimmt sind, wenn diese Veränderliche imaginär wird, kann man die Werthe zusammengesetzter Functionen von einer oder mehrern imaginären oder reellen Veränderlichen leicht finden. Unter dieser Gattung von Functionen gibt es einige, welche in der Analysis oft vorkommen. Z. B. die vier Functionen:

(150) $$\tan x, \quad \cot x, \quad \sec x, \quad \operatorname{cosec} x,$$

welche durch die Gleichungen:

(151) $$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

bestimmt werden; ferner die Kreisbogen, deren Tangente, Cotangente, Secante oder Cosecante $=x$ ist. Um zu zeigen, wie man die Werthe dieser Bogen bestimmen kann, wollen wir durch:

(152) $$z = \text{arc. tang}\,[(x)]$$

irgend einen der Bogen andeuten, deren Tangente $=x$ ist. Man hat also:

(153) $$x = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{(e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}})\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\frac{e^{2z\sqrt{-1}} - 1}{e^{2z\sqrt{-1}} + 1}.$$

Hieraus folgt:

$$(154)\qquad e^{2z\sqrt{-1}} = \frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}},$$

und folglich:

$$2z\sqrt{-1} = 2\sqrt{-1}.\text{arc. tang}\,x =$$
$$l\left\{\left(\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}\right)\right\} = l[(1+x\sqrt{-1})] - l[(1-x\sqrt{-1})],$$

oder:

$$(155)\qquad \text{arc. tang}\,[(x)] = \frac{l[(1+x\sqrt{-1})] - l[(1-x\sqrt{-1})]}{2\sqrt{-1}}.$$

Uebrigens wollen wir bemerken, daß die Gleichung (155) in dem Falle, wo die Veränderliche x reell bleibt, auch dann statt findet, wenn man die doppelten Parenthesen wegläßt. Denn alsdann folgt aus der Gleichung (85):

$$l(1+x\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}l(1+x^2) + \sqrt{-1}.\text{arc. tang}\,x,$$
$$l(1-x\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}l(1+x^2) - \sqrt{-1}\,\text{arc. tang}\,x,$$

und folglich:

$$(156)\qquad \text{arc. tang}\,x = \frac{l(1+x\sqrt{-1}) - (1-x\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

Nun ist es aber zur Bestimmung des Sinnes der Bezeichnung:

$$(157)\qquad \text{arc. tang}\,x$$

in dem Falle, wo die Veränderliche x imaginär wird, offenbar hinreichend, die Formel (156) auf diesen Fall zu erweitern, welches jetzt geschehen soll. Man erhält folglich, wenn man $x = p + q\sqrt{-1}$ setzt:

$$(158)\qquad \text{arc. tang}\,x = \frac{l(1-q+p\sqrt{-1}) - l(1+q-p\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}};$$

und hieraus folgt für $q^2 < 1$:

$$(159)\qquad \text{arc. tang}\,x =$$
$$\frac{1}{2}\left\{\text{arc. tang}\frac{p}{1-q} + \text{arc. tang}\frac{p}{1+q}\right\} + \frac{\sqrt{-1}}{4}\,l\left\{\frac{p^2+(1+q)^2}{p^2+(1-q)^2}\right\}.$$

Setzte man hingegen $q^2 > 1$, so müßte man auf die Anwendung einer der Bezeichnungen:

$$l(1-q+p\sqrt{-1}),\quad l(1+q-p\sqrt{-1}),$$

und folglich auf die der Bezeichnung arc. tang x verzichten.

Wenn die Bedingung $q^2 < 1$ erfüllt ist, so ist jede der Differenzen:

$$l[(1+x\sqrt{-1})] - l(1+x\sqrt{-1}),\quad l[(1-x\sqrt{-1})] - l(1-x\sqrt{-1})$$

von der Form:

$$\pm 2k\pi\sqrt{-1},$$

wo k eine ganze Zahl bezeichnet, und folglich ist die Differenz:

$$\text{arc. tang}\,[(x)] - \text{arc. tang}\,x = \frac{l[(1+x\sqrt{-1})] - l(1+x\sqrt{-1}) + l[(1-x\sqrt{-1})] - l(1-x\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}},$$

von der Form:

$$\pm k\pi.$$

Man hat folglich alsdann:

$$(160) \qquad \text{arc. tang}\,[(x)] = \text{arc. tang}\,x \pm k\pi,$$

oder was auf dasselbe hinausläuft:

$$(161) \qquad \text{arc. tang}\,[(x)] = \text{arc. tang}\,x + \text{arc. tang}\,[(0)].$$

Setzt man zugleich $p = 0$, $q^2 < 1$, so folgt aus der Formel (158):

$$(162) \; \text{arc. tang}\,(q\sqrt{-1}) = \frac{l(1-q) - l(1+q)}{2\sqrt{-1}} = l\left(\frac{1+q}{1-q}\right)\frac{\sqrt{-1}}{2}.$$

Nachdem durch die Formel (155) der Werth irgend eines der Bogen, deren Tangente $= x$ ist, bestimmt worden ist, läßt sich daraus leicht der Werth für irgend einen der Bogen, deren Cotangente x ist, ableiten. Denn bezeichnet man durch:

$$(163) \qquad z = \text{arc. cot.}\,[(x)]$$

einen dieser Bogen, so ist:

$$x = \text{cot.}\,z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{\text{tang}\,z},$$

und folglich:

$$\text{tang}\,z = \frac{1}{x}, \qquad z = \text{arc. tang}\left[\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

oder.

$$(164) \qquad \text{arc. cot}\,[(x)] = \text{arc. tang}\left[\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

Wenn in dem Verhältnisse $\frac{1}{x}$ der Coefficient von $\sqrt{-1}$ einen kleinern Zahlenwerth als die Einheit hat, so erhält man, wenn im zweiten Theile der Gleichung (164) die doppelten Parenthesen weggelassen werden, einen particulären Werth von arc. cot. [(x)], welcher mit arc. cot x bezeichnet werden soll, so daß:

$$(165) \qquad \text{arc. cot}\,x = \text{arc tang}\,\frac{1}{x}.$$

Durch ähnliche Betrachtungen, wie die vorhergehenden, könnte man auch die Bestimmung der Bogen, deren Secante oder Cose-

cante = x ist, leicht auf die Bestimmung der Bogen, deren Sinus oder Cosinus man kennt, zurückführen, und so folgende Formeln ableiten:

$$\text{(166)} \qquad \text{arc. sec}\,[(x)] = \text{arc. cos}\left[\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

$$\text{(167)} \qquad \text{arc. cosec}\,[(x)] = \text{arc. sin}\left[\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

$$\text{(168)} \qquad \text{arc. sec}\,x = \text{arc. cos}\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\text{(169)} \qquad \text{arc. cosec}\,x = \text{arc. sin}\left(\frac{1}{x}\right). \text{*)}$$

*) Daß imaginäre Ausdrücke eine reelle und anschauliche Bedeutung haben, also nicht, wie der Verfasser sagt, ohne alle Bedeutung sind und in der Analysis blos zur Vereinfachung der Rechnungen und Wiederauffindung von Resultaten dienen können, hat Gauß in den göttingischen gelehrten Anzeigen von 1831, Stück 64, und in der Theoria Residuorum Biquadraticorum, Commentatio Secunda art. 38 gezeigt. Die vollständige Darstellung dieses wichtigen Gegenstandes hat sich derselbe jedoch bis jetzt noch vorbehalten.

Anmerk. d. Uebers.

Zwölfte Vorlesung.

Differenziale und abgeleitete Functionen der verschiedenen Ordnungen für die Functionen einer einzigen imaginären veränderlichen Größe.

Denken wir uns die für die Differenziale und abgeleiteten Functionen der reellen Veränderlichen und Functionen gegebenen Definitionen auch auf den Fall erstreckt, wo diese Veränderlichen und Functionen imaginär werden. Alsdann kann man, von den in der vorhergehenden Vorlesung aufgestellten Sätzen ausgehend, diese Differenziale und abgeleiteten Functionen auf folgende Weise leicht bestimmen.

Bezeichnet man durch:

$$(1)\qquad i = \alpha + \beta\sqrt{-1} = \rho(\cos\nu + \sqrt{-1}\sin\nu)$$

einen unendlich kleinen imaginären Ausdruck, wo α, β, ρ, ν vier reelle Größen sind, von welchen die drei ersten unendlich klein sind, und die vierte positiv ist; so hat man vermöge der Formeln (62) und (61) der elften Vorlesung:

$$\frac{e^i - 1}{i} = 1 + \frac{i}{1.2} + \frac{i^2}{1.2.3} + \ldots =$$

$$1 + \frac{\rho}{1.2}(\cos\nu + \sqrt{-1}\sin\nu) + \frac{\rho^2}{1.2.3}(\cos 2\nu + \sqrt{-1}\sin 2\nu)\ldots$$

$$\frac{\sin i}{i} = 1 - \frac{i^2}{1.2.3} + \ldots = 1 - \frac{\rho^2}{1.2.3}(\cos 2\nu + \sqrt{-1}\sin 2\nu) + \ldots$$

Aus diesen Gleichungen folgt, wenn man die Größe ρ und folglich den Ausdruck (1) gegen die Grenze Null convergiren läßt:

$$(2)\qquad \lim\frac{e^i - 1}{i} = 1, \qquad (3)\ \lim\frac{\sin i}{i} = 1.$$

Setzt man ferner $il(A)$ für i, so findet man:

$$\lim\frac{e^{il(A)} - 1}{il(A)} = \lim\frac{A^i - 1}{il(A)} = 1,$$

und folglich:

$$(4) \qquad \lim \frac{A^i - 1}{i} = l(A),$$

indem A eine reelle oder imaginäre Constante, deren reeller Theil positiv ist, bezeichnet. Ferner ist, wenn man

$$l(1+i) = I$$

setzt:

$$\frac{l(1+i)}{i} = \frac{I}{e^I - 1} = \left(\frac{e^I - 1}{I}\right)^{-1},$$

und folglich:

$$(5) \qquad \lim \frac{l(1+i)}{i} = 1, \text{ oder } \lim l(1+i)^{\frac{1}{i}} = 1.$$

Hieraus folgt alsdann:

$$(6) \qquad \lim (1+1)^{\frac{1}{i}} = e.$$

Da endlich, wenn der reelle Theil der Constante A positiv ist, aus der Gleichung (88) der 11ten Vorlesung

$$L(1+i) = \frac{l(1+i)}{l(A)}$$

folgt, wo L einen Logarithmus aus dem Systeme von der Basis A anzeigt; so hat man in demselben Falle:

$$(7) \qquad \lim \frac{L(1+i)}{i} = \frac{1}{l(A)} \lim \frac{l(1+i)}{i} = \frac{1}{l(A)}.$$

Die verschiedenen vorhergehenden Formeln stimmen mit den in den Vorerinnerungen gegebenen überein, wenn sich der durch i bezeichnete unendlich kleine imaginäre Ausdruck auf eine reelle Größe reducirt. Aber es war von Wichtigkeit, sich zu überzeugen, daß diese Formeln gültig bleiben, selbst wenn i imaginär wird. Ferner, drückt man das unendlich kleine Increment einer imaginären Veränderlichen x durch $\Delta x = i$ aus, so kann die abgeleitete Function von:

$$y = f(x)$$

d. h. die Grenze, welcher sich das Verhältniß:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

nähert, während sich i der Null nähert, wieder durch:

$$y' \text{ oder } f'(x)$$

bezeichnet werden.

Die Differenziale dx, dy sind nichts anders, als imaginäre Ausdrücke, deren Verhältniß dem letzten Verhältnisse der unendlich kleinen Incremente Δx, Δy gleich ist; folglich sind es imaginäre

Ausdrücke, welche durch die Gleichungen:

$$\frac{dy}{dx}=y', \text{ oder } dy=y'dx$$

mit einander verbunden sind.

Nun ist dieser Gleichung gemäß das Differenzial dy vollkommen bestimmt, wenn die Form der Function $y=f(x)$ und das Differenzial dx der unabhängig veränderlichen Größe bestimmt ist. Aber dieses letzte Differenzial bleibt völlig willkührlich, und kann jeder beliebige imaginäre Ausdruck sein.

Hiernach erhält man durch ähnliche Betrachtungen, wie in der ersten Vorlesung, und mit Berücksichtigung der Formel:

$$(8)\qquad L(e)=\frac{l(e)}{l(A)}=\frac{1}{l(A)},$$

1) für irgend welche imaginäre Werthe der Veränderlichen x und der Constante a:

$$(9)\left\{\begin{array}{l} d(a+x)=dx,\ d(a-x)=-dx,\ d(ax)=adx, \\ d\left(\frac{a}{x}\right)=-\frac{adx}{x^2},\ d.e^x=e^x dx \\ d\sin x=\cos x\,dx=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx, \\ d\cos x=-\sin x\,dx=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx; \end{array}\right.$$

2) für imaginäre Werthe der Constante A, deren reeller Theil positiv ist:

$$(10)\qquad d.A^x=A^x l(A)dx;$$

3) für Werthe von x, deren reller Theil positiv ist:

$$(11)\ d.x^a=ax^{a-1}dx,\quad (12)\ dL(x)=L(e)\frac{dx}{x},\quad (13)\ d.l(x)=\frac{dx}{x}.$$

und für Werthe von x, deren reeller Theil negativ ist:

$$(14)\qquad d(-x)^a=-a(-x)^{a-1}dx,$$

$$(15)\qquad dL(-x)=L(e)\frac{dx}{x},$$

$$(16)\qquad dl(-x)=\frac{dx}{x}.$$

Ferner folgt aus den Formeln (86) oder (87) Seite 118 in Verbindung mit den Formeln (15) oder (16):

$$(17)\qquad dl[(x)]=\frac{dx}{x},$$

und aus der Formel (78) Seite 117:

$$(18)\qquad d\,L[(x)] = \frac{1}{l(A)}\cdot\frac{dx}{x} = L(e)\frac{dx}{x}.$$

Auch lassen sich die zwei ersten der Gleichungen (13) Seite 21, d. h.:

$$(19)\qquad d\tan g\,x = \frac{dx}{\cos^2 x},\quad d\cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x},$$

und die Gleichung (10) Seite 22:

$$(20)\qquad d\,F(y) = F'(y)\,dy,$$

leicht ableiten, wo y irgend welche Function von x ist. Dann ergeben sich aus dieser Gleichung unmittelbar die meisten der Formeln auf Seite 22 und 23 mit geringen Modificationen einiger dieser Formeln, und man findet z. B.:

$$(21)\quad \begin{cases} d(a+y) = dy,\ d(-y) = -y,\ d(ay) = a\,dy, \\ d\left(\frac{a}{y}\right) = -\frac{dy}{y^2},\quad d\,l[(y)] = \frac{dy}{y},\ \text{etc.}\ldots \end{cases}$$

$$(22)\qquad d\sec.x = \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x},\quad d\,\mathrm{cosec}\,x = -\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}.$$

Setzt man ferner:

$$y = x^a,$$

so ist:

$$l[(y)] = l[(x^a)] = a\,l[(x)].$$

Differenzirt man nun, und berücksichtigt die Formel (17); so findet man, wie gewöhnlich, die Formeln:

$$\frac{dy}{y} = a\frac{dx}{x},\quad \frac{dy}{dx} = a\frac{y}{x} = a\,x^{a-1},$$

(siehe Seite 22), und folglich die Formel (11).

Desgleichen, setzt man:

$$y = \mathrm{arc.}\tan g[(x)],\ \text{oder}\ y = \mathrm{arc.}\cot[(x)],$$

so folgt daraus:

$$\tan g\,y = x,\ \text{oder}\ \cot y = x.$$

Differenzirt man, so erhält man mit Berücksichtigung der Gleichungen (19) die Formel:

$$dy = \cos^2 y\,dx,\ \text{oder}\ dy = -\sin^2 y\,dx,$$

woraus folgt:

$$(23)\quad d\,\mathrm{arc.}\tan g[(x)] = \frac{dx}{1+x^2}\ \text{oder}\ d.\mathrm{arc.}\cot[(x)] = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

Setzte man hingegen:

$$y = \mathrm{arc.}\sin[(x)],$$

so wäre:

$$\sin y = x, \; dy = \frac{dx}{\cos y}.$$

Setzt man ferner in der ersten der Formeln (74), Vorlesung 11, $-y$ für x, so gibt diese Gleichung für jeden beliebigen reellen oder imaginären Werth der Veränderlichen y:

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1.$$

Es ist also in dem gegenwärtigen Falle:

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y, \; \cos y = [(1 - x^2)]^{\frac{1}{2}};$$

und folglich:

$$(24) \qquad d \,.\, \text{arc.} \sin [(x)] = \frac{dx}{[(1-x^2)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Ebenso würde man finden:

$$(25) \qquad d \,.\, \text{arc.} \cos [(x)] = -\frac{dx}{[(1-x^2)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Mit andern Worten, man hat, wenn der reelle Theil von $1-x^2$ positiv ist:

$$(26) \qquad d \,.\, \text{arc.} \sin [(x)] = -d \,.\, \text{arc.} \cos [(x)] = \pm \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

und wenn der reelle Theil von $1-x^2$ negativ ist:

$$(27) \qquad d \,.\, \text{arc.} \sin [(x)] = -d \,.\, \text{arc.} \cos [(x)] = \pm \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \sqrt{-1}.$$

Es verdient bemerkt zu werden, daß die Formeln (23) folgende:

$$(28) \qquad d \,.\, \text{arc.} \tan x = \frac{dx}{1+x^2}, \quad d \,.\, \text{arc.} \cot x = -\frac{dx}{1+x^2},$$

als besondere Fälle unter sich begreifen.

Ferner, setzt man in der ersten der Formeln (28) $x\sqrt{-1}$ für x, so folgt daraus, wenn die Veränderliche x als reell angesehen, und die Formel (162), Vorles. 11, berücksichtigt wird:

$$(29) \qquad d \,.\, \left\{\tfrac{1}{2} l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right\} = \frac{dx}{1-x^2},$$

was sich leicht direct finden ließe.

Wenn man blos

$$y = \text{arc.} \sin x$$

setzte, so fände man wieder:

$$dy = \frac{dx}{\cos y}.$$

Setzt man ferner:

$$x = p + q\sqrt{-1},$$

wo p, q reelle Größen bezeichnen; so wird der Werth von

arc. sin x durch die Formel (108) der vorhergehenden Vorlesung, oder durch:

$$y = \text{arc.}\sin x = \mathcal{P} + \mathcal{Q}\sqrt{-1}$$

bestimmt, wo $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ reelle Größen bezeichnen, wovon die erste den Gleichungen (110) derselben Vorlesung Genüge leistet. Folglich hat der reelle Theil von:

$$\cos y = \cos(\mathcal{P} + \mathcal{Q}\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}(e^{\mathcal{Q}} + e^{-\mathcal{Q}})\cos\mathcal{P}$$

$$- \tfrac{1}{2}(e^{\mathcal{Q}} - e^{-\mathcal{Q}})\sin\mathcal{P}.\sqrt{-1},$$

nämlich:

$$\tfrac{1}{2}(e^{\mathcal{Q}} + e^{-\mathcal{Q}})\cos\mathcal{P},$$

dasselbe Zeichen als die Größe:

$$\cos\mathcal{P} = \frac{\sqrt{q^2}}{\left\{\frac{p^2+q^2-1}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{p^2+q^2+1}{2}\right)^2 - p^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

d. h. er ist positiv.

Folglich, wenn man im ersten Theile der Formel (24) für die doppelten Parenthesen einfache setzt, so muß man zu gleicher Zeit den Ausdruck $[(1-x^2)]^{\frac{1}{2}}$ auf denjenigen seiner beiden Werthe reduciren, welcher einen reellen positiven Bestandtheil hat. Setzt man, um die Begriffe zu fixiren, $x = q\sqrt{-1}$, so findet man:

$$d.\text{arc.}\sin(q\sqrt{-1}) = \frac{\sqrt{-1}\,dq}{\sqrt{1+q^2}},$$

oder, was einerlei ist (Formel 121, Vorles. 11):

$$d.l(q+\sqrt{1+q^2}) = \frac{dq}{\sqrt{1+q^2}},$$

und hieraus folgt, wenn x statt q gesetzt wird:

$$d\,l(x+\sqrt{1+x^2}) = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

welches sich auch leicht direct finden ließe.

In dem besondern Falle, wo die Veränderliche x reell und ihr Zahlenwerth größer als 1 ist, hat keiner der zwei Werthe des Ausdruckes:

$$[(1-x^2)]^{\frac{1}{2}}$$

einen reellen positiven Bestandtheil, weil sie sich auf

$$(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1},\quad -(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$$

reduciren.

Aber alsdann muß auch der Ausdruck arc. sin x aus dem

Calcül entfernt werden, (Vorles. 11, S. 122); folglich kann das Suchen des Differenzials von arc. sin x gar nicht mehr vorkommen. Ferner folgt in demselben Falle aus der Gleichung (27) in Verbindung mit der Formel (117) der vorhergehenden Vorlesung:

$$(31)\quad d.\,\text{arc.}\sin[(x)] = \pm\sqrt{-1}\, d\,l(x+\sqrt{x^2-1}) = \pm\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}\sqrt{-1}.$$

Man kann übrigens die Richtigkeit der Gleichung (31) darthun, wenn man direct die Formel ableitet:

$$(32)\qquad d\,l(x+\sqrt{x^2-1}) = \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Was das Differenzial des Ausdruckes arc. cos x betrifft, so ergibt es sich unmittelbar aus der Gleichung (129) der vorigen Vorlesung, und es ist folglich in allen Fällen:

$$(33)\qquad d.\,\text{arc.}\cos x = -d.\,\text{arc.}\sin x.$$

Es seien nun s, u, v, w, ... verschiedene Functionen der imaginären Veränderlichen x, und Δs, Δu, Δv, Δw.... die simultanen Incremente, welche diese Functionen bekommen, wenn man der Veränderlichen x ein unendlich kleines reelles, oder imaginäres Increment $\Delta x = i$ beilegt. Ist die Function s die Summe aller übrigen, so daß man hat:

$$(34)\qquad s = u + v + w + \ldots,$$

so findet man:

$$\Delta s = \Delta u + \Delta v + \Delta w + \ldots.$$

und:

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x} + \ldots.$$

Hieraus folgt, wenn man Δx gegen die Grenze Null convergiren läßt:

$$(35)\qquad \frac{ds}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} + \ldots,$$

und folglich:

$$(36)\qquad ds = du + dv + dw + \ldots.$$

Die Gleichung (35) kann auch unter der Form ausgedrückt werden:

$$(37)\qquad s' = u' + v' + w' + \ldots.$$

Aus den Gleichungen (35) und (36), verglichen mit (34), folgt, daß das Differenzial oder die abgeleitete Function der Summe mehrerer Functionen auch in dem Falle die Summe ihrer Differenziale oder abgeleiteten Functionen ist, wenn die Veränderliche x imaginär wird. Von diesem Satze ausgehend, kann man offenbar die meisten der in der zweiten Vorlesung abgeleiteten Formeln auf den gegenwärtigen Fall erstrecken. So findet man z. B., wenn

durch m eine ganze Zahl, und durch a, b, c, ... q, r imaginäre Constanten bezeichnet werden:

(38) $d(au+bv+cw+\ldots)=adu+bdv+cdw+\ldots$

(39) $d(ax^m+bx^{m-1}+\ldots qx+r)$
$=(max^{m-1}+(m-1)bx^{m-2}+\ldots+q)dx.$

Da ferner im Allgemeinen:

$$l[(u.v.w\ldots)]=l[(u)]+l[(v)]+l[(w)]+\ldots$$

ist, so folgt, wenn man differenzirt:

$$\frac{d(uvw\ldots)}{uvw\ldots}=\frac{du}{u}+\frac{dv}{v}+\frac{dw}{w}+\ldots,$$

und also:

(40) $d(uvw\ldots)=uvw\ldots\left\{\frac{du}{u}+\frac{dv}{v}+\frac{dw}{w}+\ldots\right\}.$

Es ist z. B.:

(41) $d(uv)=udv+vdu,$
$d(u.v.w)=vwdu+uwdy+uvdw,$

und:

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=d\left(u.\frac{1}{v}\right)=\frac{1}{v}du+ud.\frac{1}{v}=\frac{du}{v}-u.\frac{dv}{v^2},$$

oder einfacher:

(42) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}.$

Da ferner, wenn der reelle Bestandtheil von u positiv angenommen wird, und k irgend welche ganze Zahl bezeichnet,

$$l[(u^v)]=vl(u)\pm 2k\pi\sqrt{-1}$$

ist; so folgt:

$$\frac{d(u^v)}{u^v}=v.\frac{du}{u}+l(u)dv,$$

also:

(43) $d(u^v)=u^v\left\{\frac{v}{u}du+l(u)dv\right\}.$

Setzt man in der Formel (43) $\frac{1}{v}$ für v, und nimmt den reellen Theil von u wieder positiv, so ergibt sich:

(44) $d.u^{\frac{1}{v}}=u^{\frac{1}{v}}\left(\frac{du}{uv}-l(u)\frac{dv}{v^2}\right).$

Endlich geben die Formeln (43) und (44), wenn man u=v=x

setzt, und den reellen Theil von x positiv annimmt:

$$(45)\quad d.x^x = x^x[1+l(x)]dx, \quad d.x^{\frac{1}{x}} = \frac{1-l(x)}{x^2} x^{\frac{1}{x}} dx.$$

Wir wollen diese Rechnungen nicht weiter fortsetzen, und zum Schlusse der zwölften Vorlesung einige Worte über die Differenziale und abgeleiteten Functionen der zweiten oder höhern Ordnung von den Functionen einer imaginären Veränderlichen sagen.

Da die Differenziale und abgeleiteten Functionen $f'(x)dx$, $f''(x)$ einer Function $y = f(x)$ der imaginären Veränderlichen x wieder Functionen dieser Veränderlichen sind; so leuchtet ein, daß man aus $f(x)$ eine Menge neuer Functionen ableiten kann, wovon jede das Differenzial oder die derivirte Function der vorhergehenden ist. Diese neuen Functionen werden die Differenziale oder abgeleiteten Functionen der verschiedenen Ordnungen von y oder $f(x)$ genannt. Die derivirten Functionen der verschiedenen Ordnungen werden durch:

$$y', y'', y''' \ldots . y^{(n)}$$

bezeichnet, oder durch:

$$f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots . f^{(n)}(x);$$

und die Differenziale der verschiedenen Ordnungen von der Function y durch:

$$dy, d^2y, d^3y, \ldots . d^ny.$$

Hiernach erhält man durch Betrachtungen, wie in der dritten Vorlesung, unmittelbar die Formeln:

$$dy = y'dx, \; d^2y = y''dx^2, \; d^3y = y'''dx^3, \ldots d^ny = y^{(n)}dx^n,$$

welche auch für den Fall gelten, wo die unabhängig veränderliche Größe x und das Differenzial dx imaginär werden. Ferner kann man die in der dritten Vorlesung abgeleiteten Formeln leicht auf den gegenwärtigen Fall erstrecken; z. B. folgende:

$$d^n e^x = e^x dx^n, \; d^n \sin x = \sin(x + \tfrac{1}{2}n\pi) dx^n,$$

$$d^n \cos x = \cos(x + \tfrac{1}{2}n\pi) dx^n,$$

$$d^n.x^a = a(a-1)\ldots(a-n+1)x^{a-n}dx^n,$$

$$d^n l(x) = (-1)^{n-1} \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{x^n} dx^n, \text{ etc.} \ldots,$$

und ferner findet man:

für $y = f(x+a)$, $y^{(n)} = f^{(n)}(x+a)$, $d^ny = f^{(n)}(x+a)dx^n$.

für $y = f(ax)$, $y^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax)$, $d^ny = a^n f^{(n)}(ax)dx^n$.

etc...

Dreizehnte Vorlesung.

Relationen, welche zwischen den Functionen einer imaginären Veränderlichen x und ihren verschiedenen Differenzialen oder abgeleiteten Functionen statt finden. Entwickelung dieser Functionen nach den steigenden Potenzen von x, oder nach der Differenz x—a, in welcher a einen besondern Werth der Veränderlichen x bezeichnet.

Es sei:

$$x = p + q\sqrt{-1} \tag{1}$$

eine imaginäre Veränderliche, und f(x) eine Function derselben. Ferner sei:

$$r = \sqrt{p^2 + q^2} \tag{2}$$

der Modulus der Veränderlichen x, so kann der Werth von x durch:

$$x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t) \tag{3}$$

ausgedrückt werden, indem t einen reellen Bogen bezeichnet; und wenn man r in der Function:

$$f(x) = f[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)], \tag{4}$$

allein als veränderlich betrachtet, so läßt sich diese Function auf die Form:

$$\varphi(r) + \sqrt{-1}\,\chi(r), \tag{5}$$

bringen, wo $\varphi(r)$, $\chi(r)$ zwei reelle Functionen von r bezeichnen. Hierauf findet man, wenn man die Gleichung:

$$f[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)] = \varphi(r) + \sqrt{-1}\,\chi(r) \tag{6}$$

nach den Prinzipien der vorhergehenden Vorlesung mehrere Male nach einander in Beziehung auf r differenzirt:

$$\left\{\begin{aligned} &(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)\, f'[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)] \\ &\qquad = \varphi'(r) + \sqrt{-1}\,\chi'(r), \\ &(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)^2\, f''[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)] \\ &\qquad = \varphi''(r) + \sqrt{-1}\,\chi''(r), \\ &\text{etc...} \end{aligned}\right. \tag{7}$$

und im Allgemeinen:

$$(8)\quad (\cos + \sqrt{-1}\sin t)^n f^{(n)}[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)] = \varphi^{(n)}(r) + \sqrt{-1}\,\chi^{(n)}(r),$$

wo n irgend eine ganze Zahl ist. Nehmen wir nun an, daß die Functionen:

$$f(x),\ f'(x), \ldots f^{(n-1)}(x),$$

alle für $x=0$ verschwinden, so daß:

$$(9)\quad f(0)=0,\ f'(0)=0, \ldots f^{(n-1)}(0)=0$$

ist; so folgt aus den Formeln (7), wenn man $r=0$ setzt:

$$(10)\quad \begin{cases} \varphi(0)+\sqrt{-1}\,\chi(0)=0,\ \varphi'(0)+\sqrt{-1}\,\chi'(0)=0, \ldots \\ \ldots \varphi^{(n-1)}(0)+\sqrt{-1}\,\chi^{(n-1)}(0)=0, \end{cases}$$

folglich:

$$(11)\quad \varphi(0)=0,\ \varphi'(0)=0, \ldots \varphi^{(n-1)}(0)=0,$$

$$(12)\quad \chi(0)=0,\ \chi'(0)=0 \ldots \chi^{(n-1)}(0)=0.$$

Wenn überdies die Functionen:

$$(13)\quad f(x),\ f'(x),\ f''(x), \ldots f^{(n-1)}(x),\ f^{(n)}(x)$$

in der Nähe des Werthes $x=0$ continuirlich sind in Beziehung auf x, so werden die Functionen:

$$(14)\quad \begin{cases} \varphi(r),\ \varphi'(r),\ \varphi''(r), \ldots \varphi^{(n-1)}(r),\ \varphi^{n}(r) \\ \chi(r),\ \chi'(r),\ \chi''(r), \ldots \chi^{(n-1)}(r),\ \chi^{(n)}(r) \end{cases}$$

in der Nähe von $r=0$ auch nach r continuirlich sein, und die Formel (10) Vorles. 4 gibt, wenigstens für positive Werthe von r, die unter einer gewissen Grenze k liegen:

$$(15)\quad \varphi(r) = \frac{r^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^{(n)}(\theta_1 r),$$

$$(16)\quad \chi(r) = \frac{r^n}{1.2.3\ldots n}\chi^{(n)}(\theta_2 r),$$

wo θ_1, θ_2 zwei kleinere Zahlen als 1 sind. Mithin gibt die Gleichung (6):

$$(16)\quad f[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)] = \frac{r^n}{1.2.3\ldots n}[\varphi^{(n)}(\theta_1 r) + \sqrt{-1}\,\chi^{(n)}(\theta_2 r)].$$

Damit diese Formel zwischen den Grenzen $r=0$, $r=k$ gültig sei, genügt es offenbar, da die Functionen (13) in Beziehung auf x stetig sind, wenn der Modulus r zwischen diesen Grenzen liegt, daß das Verhältniß:

$$(17)\quad \frac{f(x)}{x^{n-1}} = \frac{\varphi(r)+\sqrt{-1}\,\chi(r)}{r^{n-1}(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)^{n-1}}$$

mit r verschwindet. Denn da dieses Verhältniß dem Producte:

$$[\cos(n-1)t-\sqrt{-1}\sin(n-1)t]\left\{\frac{\varphi(r)}{r^{n-1}}+\sqrt{-1}\frac{\chi(r)}{r^{n-1}}\right\}$$

gleich ist, so kann es nur für einen Werth von $r=0$ verschwinden, wenn dieser Werth der Gleichung:

$$\frac{\varphi(r)}{r^{n-1}}+\sqrt{-1}\frac{\chi(r)}{r^{n-1}}=0,$$

und folglich den beiden Bedingungen:

$$\frac{\varphi(r)}{r^{n-1}}=0,\quad \frac{\chi(r)}{r^{n-1}}=0$$

Genüge leistet.

Wenn nun diese Bedingungen erfüllt sind für $r=0$, so haben sie die Gleichungen (11) und (12) zur Folge (siehe Vorles. 5 und 6). Mithin finden die Formeln (15) und folglich auch die Formel (16) zwischen den Grenzen $r=0$, $r=k$ statt. Soll die Veränderliche x unendlich klein werden, so ist erforderlich, aber auch genügend, daß der Modulus r unendlich klein wird. Nun findet man aber in dieser Voraussetzung, wenn man annimmt, daß $\varphi^{(n)}(0)$ und $\chi^{(n)}(0)$ endliche Werthe behalten, und durch α, β unendlich kleine Größen bezeichnet:

$$(19)\qquad \varphi^{(n)}(r)=\varphi^{(n)}(0)+\alpha,\quad \chi^{(n)}(r)=\chi^{(n)}(0)+\beta.$$

Folglich gibt die Formel (16):

$$(20)\qquad f[r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)]=$$
$$\frac{r^n}{1.2.3\ldots n}[\varphi^{(n)}(0)+\sqrt{-1}\chi^{(n)}(0)+\alpha+\beta\sqrt{-1}].$$

Ueberdies folgt aus der Formel (8), wenn man $r=0$ setzt:

$$(21)\qquad \varphi^{(n)}(0)+\sqrt{-1}\chi^{(n)}(0)=(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)^n f^{(n)}(0).$$

Folglich erhält man auch, wenn man der Bequemlichkeit wegen

$$(22)\qquad I=\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)^n}=$$
$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})(\cos nt-\sqrt{-1}\sin nt)$$

setzt:

$$(23)\qquad f[r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)]=$$
$$\frac{r^n(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)^n}{1.2.3\ldots n}[f^{(n)}(0)+I],$$

oder was einerlei ist:

$$f(x)=\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}[f^{(n)}(0)+I].$$

In dieser letzten Formel bezeichnet I eine neue Veränderliche, welche mit x zugleich verschwindet. Man kann also folgenden Satz aussprechen.

Lehrsatz 1. Wenn die Functionen (13) in der Nähe des besondern Werthes $x=0$ nach x stetig sind, und alle, die letzte $f^{(n)}(x)$ ausgenommen, mit x verschwinden, und $f^{(n)}(0)$ einen endlichen Werth behält; so hat man für einen unendlich kleinen Werth von x:

$$f(x)=\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}[f^{(n)}(0)+I], \tag{24}$$

wo I einen imaginären Ausdruck bezeichnet, welcher mit der Veränderlichen x zu gleicher Zeit verschwindet.

In dem Falle, wo die Veränderliche x reell ist, kann die Gleichung (24) unmittelbar aus der Formel (18) Vorles. 6 abgeleitet werden.

Es sei nun $f(x)$ eine Function von x, welche nebst ihren abgeleiteten Functionen bis zur Ordnung n für $x=0$ einen endlichen Werth behält, und außerdem wollen wir annehmen, daß die Functionen:

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ldots f^{(n)}(x) \tag{25}$$

für imaginäre Werthe von x, oder für Werthe von der Form:

$$x=r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t),$$

zwischen den Grenzen 0 und k des Modulus r continuirlich bleiben; so hat man, wenn man den Modulus r allein als veränderlich ansieht, und durch $\varphi(r)$, $\chi(r)$ zwei reelle Functionen von r bezeichnet, welche der Gleichung:

$$f[r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)]=\varphi(r)+\sqrt{-1}\,\chi(r) \tag{26}$$

Genüge leisten, für einen ganzen Werth von m:

$$(27)\ \begin{cases}(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)^m f^{(m)}[r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)]= \\ \qquad\qquad \varphi^{(m)}(r)+\sqrt{-1}\,\chi^{(m)}(r). \\ (\cos t+\sqrt{-1}\sin t)^m f^{(m)}(0)=\varphi^{(m)}(0)+\sqrt{-1}\,\chi^{(m)}(0).\end{cases}$$

Anderer Seits gibt die Formel (8), Vorles. 8, zwischen den Grenzen $r=0$, $r=k$:

$$(28)\ \begin{cases}\varphi(r)=\varphi(0)+\frac{r}{1}\varphi'(0)+\frac{r^2}{1.2}\varphi''(0)+\ldots \\ \qquad \frac{r^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\varphi^{(n-1)}(0)+\frac{r^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^{(n)}(\theta_1 r), \\ \chi(r)=\chi(0)+\frac{r}{1}\chi'(0)+\frac{r^2}{1.2}\chi''(0)+\ldots \\ \qquad \frac{r^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\chi^{(n-1)}(0)+\frac{r^n}{1.2.3\ldots n}\chi^{(n)}(\theta_2 r),\end{cases}$$

indem θ_1, θ_2 zwei kleinere Zahlen als 1 bezeichnen. Es folgt also aus der Gleichung (28) in Verbindung mit der zweiten der Gleichungen (27):

$$(29) f[r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)]=f(0)+\frac{r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)}{1}f'(0)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{r^{n-1}(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0)$$
$$+\frac{r^n}{1.2\ldots n}[\varphi^{(n)}(\theta_1 r)+\sqrt{-1}\,\chi^{(n)}(\theta_2 r)],$$

oder was einerlei ist:

$$(30)\ f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0)$$
$$+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\,\frac{\varphi^{(n)}(\theta_1 r)+\chi^{(n)}(\theta_2 r)\sqrt{-1}}{(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)^n}.$$

Aus der Gleichung (30) folgt, daß die Function $f(x)$ als aus zwei Theilen, nämlich aus der ganzen Function:

$$(31)\ f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0)$$

und dem Reste:

$$(32)\qquad +\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\,\frac{\varphi^{(n)}(\theta_1 r)+\chi^{(n)}(\theta_2 r)\sqrt{-1}}{(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)^n}$$

bestehend angesehen werden kann.

Wenn dieser Rest für wachsende Werthe von n unendlich abnimmt, so ist die Reihe:

$$(33)\quad f(0),\ \frac{x}{1}f'(0),\ \frac{x^2}{1.2}f''(0),\ \frac{x^3}{1.2.3}f'''(0),\ \text{etc}\ldots$$

convergent, und $f(x)$ ist genau die Summe dieser Reihe, so daß:

$$(34)\ f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)+\text{etc}\ldots$$

ist. Die Gleichung (34) ist die Maclaurinsche Reihe, auf den Fall erweitert, wo die Veränderliche x imaginär wird.

Ferner wollen wir annehmen, daß die Functionen (25) für $x=a$, indem a einen besondern Werth der Veränderlichen x bezeichnet, einen endlichen Werth behalten und stetig bleiben, so lange der Modulus ρ der Differenz $x-a$ zwischen den Grenzen 0 und k liegt. Setzt man alsdann:

$$(35)\qquad x-a=z=\rho(\cos\nu+\sqrt{-1}\sin\nu),$$

wo ν ein reeller Bogen ist, und:

$$(36) f(a+z) = f[a+\rho(\cos\nu+\sqrt{-1}\sin\nu)] = \Phi(\rho)+X(\rho)\sqrt{-1};$$

so findet man:

$$(37)\begin{cases}(\cos\nu+\sqrt{-1}\sin\nu)^m f^{(m)}[a+\rho(\cos\nu+\sqrt{-1}\sin\nu)]\\ \qquad\qquad = \Phi^{(n)}(\rho)+\sqrt{-1}X^{(n)}(\rho),\\ (\cos\nu+\sqrt{-1}\sin\nu)^m f^{(m)}(a) = \Phi^{(m)}(0)+\sqrt{-1}X^{(m)}(0).\end{cases}$$

Da ferner die Formel (8), Vorles. 8 gibt:

$$(38)\begin{cases}\Phi(\rho)=\Phi(0)+\frac{\rho}{1}\Phi'(0)+\frac{\rho^2}{1.2}\Phi''(0)+\ldots\\ \qquad +\frac{\rho^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\Phi^{(n-1)}(0)+\frac{\rho^n}{1.2\ldots n}\Phi^{(n)}(\theta_1\rho),\\ X(\rho)=X(0)+\frac{\rho}{1}X'(0)+\frac{\rho^2}{1.2}X''(0)+\ldots\\ \qquad +\frac{\rho^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}X^{(n-1)}(0)+\frac{\rho^n}{1.2\ldots n}X^{(n)}(\theta_2\rho),\end{cases}$$

wo θ_1 und θ_2 zwei kleinere Zahlen als 1 sind; so folgt aus der Gleichung (36) in Verbindung mit der zweiten der Formeln (37):

$$(39)\begin{cases}f[a+\rho(\cos\nu+\sqrt{-1}\sin\nu)]=f(a)+\\ \qquad +\frac{\rho(\cos\nu+\sqrt{-1}\sin\nu)}{1}f'(a)+\ldots\\ \ldots+\frac{\rho^{n-1}(\cos\nu+\sqrt{-1}\sin\nu)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)\\ \qquad +\frac{\rho^n}{1.2\ldots n}[\Phi^{(n)}(\theta_1\rho)+\sqrt{-1}X^{(n)}(\theta_2\rho)],\end{cases}$$

oder:

$$(40)\begin{cases}f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)\\ \qquad +\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)\\ \qquad +\frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots n}\,\frac{\Phi^{(n)}(\theta_1\rho)+\sqrt{-1}X^{(n)}(\theta_2\rho)}{(\cos\nu+\sqrt{-1}\sin\nu)^n}.\end{cases}$$

Der Formel (40) zufolge kann die Function $f(x)$ als aus der ganzen Function:

$$(41)\quad f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}.f''+\ldots$$
$$+\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a),$$

welche nach den steigenden Potenzen von $(x-a)$ fortschreitet, und aus einem Reste:

$$(42)\qquad \frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{\Phi^{(n)}(\theta_1\rho)+\sqrt{-1}\,X^{(n)}(\theta_2\rho)}{(\cos\nu+\sqrt{-1}\sin\nu)^n},$$

bestehend betrachtet werden.

Wenn dieser Rest für wachsende Werthe der ganzen Zahl n unendlich abnimmt, so convergirt die Reihe:

$$(43)\qquad f(a),\ \frac{x-a}{1}f'(a),\ \frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a),\ldots.$$

und aus (40) folgt:

$$(44)\quad f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\text{etc}\ldots$$

oder:

$$(45)\quad f(a+z)=f(a)+\frac{z}{1}f'(a)+\frac{z^2}{1.2}f''(a)+\text{etc}\ldots$$

Setzt man in dieser letzten Reihe x für a, und h für z, so erhält man folgende:

$$(46)\quad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)+\text{etc}\ldots$$

d. h. die Taylorsche Reihe, auf den Fall erstreckt, wo die Veränderliche x und ihr Increment h imaginär werden. Wenn der Modulus ρ in der Gleichung (40) unendlich klein wird, so ist das Verhältniß:

$$\frac{\Phi^{(n)}(\theta_1\rho)+\sqrt{-1}\,X^{(n)}(\theta_2\rho)}{(\cos\nu+\sqrt{-1}\sin\nu)^n}$$

sehr wenig von dem Verhältnisse:

$$\frac{\Phi^{(n)}(0)+\sqrt{-1}\,X^{(n)}(0)}{(\cos\nu+\sqrt{-1}\sin\nu)^n}=f^{(n)}(a)$$

verschieden. Setzt man also:

$$(47)\qquad \frac{\Phi^{(n)}(\theta_1\rho)+\sqrt{-1}\,X^{(n)}(\theta_2\rho)}{(\cos\nu+\sqrt{-1}\sin\nu)^n}=f^{(n)}(a)+I,$$

wo I und $x-a$ unendlich kleine imaginäre Ausdrücke sind; so gibt die Formel (40):

$$(48)\ f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\ldots\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)$$
$$+\frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n}[f^{(n)}(a)+I],$$

und hieraus folgt, wenn man $x-a=i$ setzt:

$$(49)\ f(a+i)=f(a)+\frac{i}{1}f'(a)+\ldots\frac{i^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)$$
$$+\frac{i^n}{1.2\ldots n}[f^{(n)}(a)+I].$$

Wenn man in der Gleichung (49) x für a setzt, so wird man unmittelbar auf folgenden Satz geführt:

Lehrsatz 2. Angenommen, die Veränderliche x bekomme einen Werth, in dessen Nähe die Functionen (25) stetig bleiben, und die imaginäre Veränderliche i einen unendlich kleinen Werth; so ist:

$$(50)\ f(x+i)=f(x)+\frac{i}{1}f'(x)+\ldots\frac{i^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)$$
$$+\frac{i^n}{1.2.3\ldots n}[f^{(n)}(x)+I],$$

wo I einen Ausdruck bezeichnet, der mit i zugleich verschwindet.

In diesem Satze sind offenbar der Lehrsatz 1 und der folgende Lehrsatz als besondere Fälle enthalten.

Lehrsatz 3. Angenommen, die imaginäre Veränderliche x erhalte einen Werth, in dessen Nähe die Function $f(x)$ und ihre abgeleitete $f'(x)$ stetig bleiben, und die imaginäre Veränderliche i bekomme einen unendlich kleinen Werth; so hat man:

$$(51)\qquad f(x+i)=f(x)+i[f'(x)+I],$$

wo I mit i verschwindet.

Setzt man für $f(x)$ successive die Functionen:

$$e^x,\ \sin x,\ \cos x,\ x^{\frac{1}{2}},\ x^\mu,\ l(x),\ \text{arc.tang}\,x,\ \text{etc.}\ldots,$$

so ergibt sich aus der Formel (51):

$$(52)\qquad e^{x+i}=e^x+i(e^x+I),$$

$$(53)\qquad \sin(x+i)=\sin x+i(\cos x+I),$$

$$(54)\qquad \cos(x+i)=\cos x-i(\sin x-I),$$

(55) $$(x+i)^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}+i\left(\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}+I\right),$$

(56) $$(x+i)^{\mu}=x^{\mu}+i\,(\mu x^{\mu-1}+I),$$

(57) $$l(x+i)=l(x)+i\left(\frac{1}{x}+I\right),$$

(58) $$\text{arc. tang}(x+i)=\text{arr. tang } x+i\left(\frac{1}{1+x^2}+I\right),$$

etc...

Wenn mehrere Glieder der Reihe:

(59) $$f'(a),\ f''(a),\ f'''(a),\ \text{etc}\ldots$$

verschwinden, und $f^{(n)}(a)$ ist das erste von Null verschiedene Glied; so folgt aus der Gleichung (49):

(60) $$f(a+i)=f(a)+\frac{i^n}{1.2.3\ldots n}[f^{(n)}(a)+I].$$

Man kann also noch folgenden Satz aussprechen:

Lehrsatz 4. Wir wollen annehmen, daß die in der Nähe des besondern Werthes $x=a$ nach x continuirlichen Functionen (25) mit $x=a$ verschwinden, die erste $f(x)$ und die letzte $f^{(n)}(x)$ ausgenommen, und daß $f(x)$ und $f^{(n)}(x)$ für $x=a$ endliche Werthe behalten; so ist, wenn der Veränderlichen i ein unendlich kleiner Werth beigelegt wird, für $x=a$:

(61) $$f(x+i)=f(x)+\frac{i^n}{1.2.3\ldots n}[f^{(n)}(x)+I],$$

indem I einen imaginären Ausdruck bezeichnet, welcher mit der Veränderlichen i zu gleicher Zeit Null wird.

Nun sei R der Modulus der Function $f(x)$ der imaginären Veränderlichen x, so daß:

(62) $$f(x)=R(\cos T+\sqrt{-1}\sin T)$$

ist, wo T einen reellen Bogen bezeichnet. Ueberdies seien ΔR, ΔT die Incremente, welche die Größen R, T bekommen, wenn der Veränderlichen x ein unendlich kleines Increment:

(63) $$\Delta x=i=\rho(\cos\nu+\sqrt{-1}\sin\nu)$$

gegeben wird; so läßt sich der genäherte Werth von ΔR vermittelst der Formel (51) oder (61) leicht bestimmen. Denn aus der Gleichung (62) folgt:

(64) $$(R+\Delta R)[\cos(T+\Delta T)+\sqrt{-1}\sin(T+\Delta T)=f(x+i].$$

Verbindet man dann diese Gleichung mit (51), nennt R_1 den Modulus von $f'(x)$, und bezeichnet durch T_1, α, β reelle Größen, welche den Gleichungen:

$$(65) \qquad f'(x) = R_1 (\cos T_1 + \sqrt{-1} \sin T_1),$$

$$(66) \qquad I(\cos \nu + \sqrt{-1} \sin \nu) = \alpha + \beta \sqrt{-1}$$

Genüge leisten; so erhält man:

$$(67) \left\{ \begin{array}{l} (R + \Delta R)[\cos(T + \Delta T) + \sqrt{-1} \sin(T + \Delta T)] \\ \qquad = R(\cos T + \sqrt{-1} \sin T) + \\ \rho(R_1 [\cos(\nu + T_1) + \sqrt{-1} \sin(\nu + T_1)] + \alpha + \beta \sqrt{-1}), \end{array} \right.$$

oder:

$$(68) \left\{ \begin{array}{l} (R + \Delta R) \cos(T + \Delta T) = R \cos T + \rho[R_1 \cos(\nu + T_1) + \alpha], \\ (R + \Delta R) \sin(T + \Delta T) = R \sin T + \rho[R_1 \sin(\nu + T_1) + \beta]. \end{array} \right.$$

Verbindet man ferner die Formeln (68) durch Addition, nachdem man jeden Theil zum Quadrat erhoben hat, und setzt der Kürze wegen:

$$(69) \quad \gamma = 2R(\alpha \cos T + \beta \sin T) + \rho[(R_1 \cos(\nu + T_1) + \alpha)^2 + (R_1 \sin(\nu + T_1) + \beta)^2];$$

so erhält man:

$$(70) \quad (R + \Delta R)^2 = R^2 + \rho[2RR_1 \cos(\nu + T_1 - T) + \gamma].$$

Da nun die durch die Formeln (66) und (69) bestimmten Werthe von α, β, γ unendlich klein sind, so folgt aus der Gleichung (70), wenn man aus beiden Theilen mit Berücksichtigung der Formel (55) die positive Quadratwurzel auszieht, und durch δ eine Größe bezeichnet, welche mit dem Modulus ρ verschwindet:

$$(71) \quad R + \Delta R = R + \rho[2RR_1 \cos(\nu + T_1 - T) + \gamma]\left(\frac{1}{2R} + \delta\right).$$

In dieser letzten Gleichung, welche $R^2 > 0$ voraussetzt, ist das Product:

$$[2RR_1 \cos(\nu + T_1 - T) + \gamma]\left(\frac{1}{2R} + \delta\right),$$

sehr wenig von:

$$R_1 \cos(\nu + T_1 - T)$$

verschieden. Mithin kann diese Gleichung auf die Form gebracht werden:

$$(72) \qquad \Delta R = \rho[\cos(\nu + T_1 - T) + \omega];$$

wo ω auch eine unendlich kleine Größe bezeichnet; und folglich ist das Product:

$$(73) \qquad \rho R_1 \cos(\nu + T_1 - T)$$

der genäherte Werth des Incrementes ΔR, d. h. das Verhältniß

dieses Incrementes zu dem Producte (73) ist sehr wenig von der Einheit verschieden. Nur macht der Fall eine Ausnahme, wo man der Veränderlichen x einen Werth gibt, für welchen einer der beiden Moduli R R_1, oder eine der beiden Functionen $f(x)$, $f'(x)$ Null oder unendlich wird.

Nehmen wir nun an, daß die Functionen:

$$(74) \qquad f'(x), f''(x), \ldots f^{(n-1)}(x)$$

für einen gegebenen Werth von x verschwinden, aber daß $f(x)$ und $f^{(n)}(x)$ endliche, von Null verschiedene Werthe bekommen; so ist das Product (73) Null, wie auch der Modulus R_1 von $f'(x)$. Bezeichnet man aber den Modulus von $f^{(n)}(x)$ durch R_n, und durch T_n, α, β reelle Größen, welche den Gleichungen:

$$(75) \qquad f^{(n)}(x) = R_n(\cos T_n + \sqrt{-1}\sin T_n),$$

$$(76) \qquad I(\cos\nu + \sqrt{-1}\sin\nu)^n = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

genügen; so ergibt sich aus der Verbindung der Formeln (64) und (61):

$$(77) \left\{ \begin{aligned} &(R+\Delta R)[\cos(T+\Delta T)+\sqrt{-1}\sin(T+\Delta T)] \\ &= R(\cos T+\sqrt{-1}\sin T) + \frac{\rho^n}{1.3.3\ldots n}[R_n(\cos(n\nu+T_n) \\ &\qquad + \sqrt{-1}\sin(n\nu+T_n)) + \alpha + \beta\sqrt{-1}], \end{aligned} \right.$$

oder was einerlei ist:

$$(78) \left\{ \begin{aligned} &(R+\Delta R)\cos(T+\Delta T) = \\ &\qquad R\cos T + \frac{\rho^n}{1.2.3\ldots n}[R_n\cos(n\nu+T_n)+\alpha], \\ &(R+\Delta R)\sin(T+\Delta T) = \\ &\qquad R\sin T + \frac{\rho^n}{1.2.3\ldots n}[R_n\sin(n\nu+T_n)+\beta]. \end{aligned} \right.$$

Substituirt man dann den Gleichungen (68) die Gleichungen (78), so wird man für die Formeln (69), (70), (72) neue erhalten, welche aus jenen abgeleitet werden, wenn man für den Modulus ρ den Bruch $\frac{\rho^n}{1.2.3\ldots n}$, R_n für R und das Binom $n\nu+T_n$ für das Binom $\nu+T$ setzt. Folglich hat man, wenn man $R^2>0$ setzt, und durch ω wieder eine unendlich kleine Größe bezeichnet:

$$(79) \qquad \Delta R = \frac{\rho^n}{1.2\ldots n}[R_n\cos(n\nu+T_n-T)+\omega].$$

Folglich ist das Product:

$$(80) \qquad \frac{\rho^n R_n}{1.2.3\ldots n}\cos(n\nu+T_n-T)$$

in der gemachten Voraussetzung der genäherte Werth des Incrementes ΔR; d. h. das Verhältniß dieses Incrementes zu dem Producte (80) ist sehr wenig von der Einheit verschieden.

Wenn die Function $f(x)$ mit ihrem Modulus R für einen gegebenen Werth von x verschwindet, und zu gleicher Zeit die erste der Functionen (25), welche von Null verschieden ist, einen endlichen Werth behält; so folgt aus den Gleichungen (68) oder (78)

1) für $R_1^2 > 0$:

$$(81)\quad \begin{cases} \Delta R \cos(T+\Delta T) = \rho\,[R_1 \cos(\nu + T_1) + \alpha], \\ \Delta R \sin(T+\Delta T) = \rho\,[R_1 \sin(\nu + T_1) + \beta], \end{cases}$$

2) für $R_1 = R_2 = \ldots = R_{n-1} = 0$ und $R_n^2 > 0$:

$$(82)\quad \begin{cases} \Delta R \cos(T+\Delta T) = \dfrac{\rho^n}{1.2\ldots n}\,[R_n \cos(n\nu + T_n) + \alpha], \\ \Delta R \sin(T+\Delta T) = \dfrac{\rho^n}{1.2.3\ldots n}\,[R_n \sin(n\nu + T_n) + \beta]. \end{cases}$$

Durch ähnliche Betrachtungen, wie die obigen, ergibt sich hieraus, daß das Increment ΔR des Modulus R im ersten Falle durch:

$$(83)\qquad \Delta R = \rho(R_1 + \omega),$$

und im zweiten Falle durch:

$$(84)\qquad \Delta R = \frac{\rho^n}{1.2.3\ldots n}(R_n + \omega)$$

ausgedrückt werden kann, wo ω in beiden Hypothesen eine unendlich kleine Größe bezeichnet. Soll das Increment der Veränderlichen x, d. h.:

$$\Delta x = i = \rho(\cos\nu + \sqrt{-1}\sin\nu)$$

unendlich klein sein, so ist es nöthig, aber auch hinreichend, daß der Modulus ρ dieses Incrementes unendlich klein sei, wobei der Bogen ν übrigens eine beliebige endliche Größe sein kann. Bestimmt man nun den Bogen ν so, daß die Gleichung:

$$(85)\qquad \cos(\nu + T_1 - T) = -1,$$

oder:

$$(86)\qquad \cos(n\nu + T_n - T) = -1$$

erfüllt wird, welches der Fall ist, wenn man z. B.

$$(87)\qquad \nu = \pi + T - T_1$$

oder:

$$(88)\qquad \nu = \frac{(2m+1)\pi + T - T_n}{n},$$

setzt, wo m eine ganze Zahl bezeichnet, die kleiner als n ist; so

reducirt sich die Formel (72) auf:

$$(89) \qquad \Delta R = -\rho\,(R_1 - \omega),$$

oder die Formel (79) auf:

$$(90) \qquad \Delta R = -\frac{\rho^n}{1.2\ldots n}\,(R_n - \omega).$$

Ferner bekommt der durch die Gleichung (63) bestimmte Werth von Δx eine der Formen:

$$(91) \qquad \Delta x = -\rho[\cos(T - T_1) + \sqrt{-1}\sin(T - T_1)],$$

$$(92) \qquad \Delta x =$$

$$\rho\left\{\cos\frac{(2m+1)\pi + T - T_n}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2m+1)\pi + T - T_n}{n}\right\}.$$

Der genäherte Werth des Incrementes ΔR des Modulus ist folglich nach Formel (89) oder (90) die negative Größe:

$$(93) \qquad -\rho R_1 \text{ oder } (94) \; -\frac{\rho^n R_n}{1.2.3\ldots n}.$$

Man kann also, da dieses Increment negativ ist, folgenden Satz aufstellen:

Lehrsatz. Wir wollen annehmen, daß die Functionen (25) in der Nähe eines besondern Werthes von x, welcher die Function $f(x)$ nicht auf Null reducirt, endlich und continuirlich bleiben, und überdies

$$f(x) = R(\cos T + \sqrt{-1}\sin T)$$

setzen. Es sei:

$$f^{(n)}(x) = R_n(\cos T_n + \sqrt{-1}\sin T_n)$$

das erste Glied der Reihe:

$$f'(x),\, f''(x),\, f'''(x), \text{ etc}\ldots,$$

welches nicht für den gegebenen Werth von x verschwindet. Endlich wollen wir uns denken, daß die Veränderliche x, indem ρ eine sehr kleine positive Größe bezeichnet, ein Increment Δx bekomme, welches durch die Gleichung (91) oder (92) bestimmt wird, jenachdem $n=1$, oder $n>1$ ist; so ist der correspondirende Werth von ΔR negativ, d. h. der Modulus von

$$f(x+\Delta x)$$

wird für sehr kleine Werthe der Größe ρ kleiner als der Modulus von $f(x)$.

Uebrigens ist es nicht durchaus nöthwendig, den Werth von Δx durch die Formel (91) oder (92) bestimmt, anzunehmen, damit der Modulus von $f(x+\Delta x)$ kleiner werde, als der von $f(x)$, und es ist zureichend, dem Winkel ν in der Formel (63) einen Werth zu geben, welcher den letzten Factor des Ausdruckes (73) oder (80), d. h.:

$$\cos(\nu + T_n - T) \text{ oder } \cos(n\nu + T_n - T)$$

negativ macht. Nun ist aber diese Bedingung immer leicht zu erfüllen, weil dieser Factor das Zeichen ändert, wenn der Winkel ν einen Zuwachs π oder $\frac{\pi}{2}$ bekommt.

Zum Schlusse dieser Vorlesung wollen wir noch bemerken, daß die nach den Formeln (6), (26), (36) zwischen den durch f, f bezeichneten Functionen, und den reellen Functionen $\varphi(r)$, $\chi(r)$, $\Phi(\rho)$, $X(\rho)$ stattfindenden Relationen in vielen Fällen auch dann noch gültig bleiben, wenn man $-\sqrt{-1}$ für $\sqrt{-1}$ setzt. Dieses findet in der That im Allgemeinen statt, wenn die Function f(x) oder $f(x)$ unter reeller Form erscheint, d. h. wenn in ihrem Ausdrucke das Zeichen $\sqrt{-1}$ nicht vorkommt. Setzt man z. B. für $f(x)$ eine der einfachen Functionen, welche durch die Bezeichnungen:

$$a+x,\ a-x,\ ax,\ \frac{a}{x},\ x^a,\ A^x,\ L(x),$$
$$\sin x,\ \cos x,\ \text{arc.}\sin x,\ \text{arc.}\cos x$$

ausgedrückt werden, oder eine der zusammengesetzten Functionen, welche durch Verbindung dieser einfachen gebildet werden können; so hat die Gleichung (26), in welcher r den Modulus von x, t einen reellen Bogen und $\varphi(r)$, $\chi(r)$ zwei reelle Functionen von r bezeichnen, im Allgemeinen auch diese zur Folge:

$$(94)\qquad f[r(\cos t - \sqrt{-1}\sin t)] = \varphi(r) - \sqrt{-1}\,\chi(r).$$

Es ist mithin:

$$(95)\quad \begin{cases} \varphi(r) = \dfrac{f[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)] + f[r(\cos t - \sqrt{-1}\sin t)]}{2}, \text{ und} \\[2ex] \chi(r) = \dfrac{f[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)] - f[r(\cos t - \sqrt{-1}\sin t)]}{2\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

Vierzehnte Vorlesung.

Ueber die Auflösung der algebraischen und transcendenten Gleichungen. Zerlegung der ganzen Functionen in reelle Factoren des ersten oder zweiten Grades.

Vermittelst der in der vorhergehenden Vorlesung aufgestellten Prinzipien läßt sich leicht folgender Satz beweisen.

Lehrsatz 1. Es sei $f(x)$ eine Function von x, welche nebst ihren abgeleiteten Functionen der verschiedenen Ordnungen für alle endlichen, reellen oder imaginären Werthe von x, endlich und stetig bleibt und welche immer unendlich groß wird, wenn der Modulus der Veränderlichen x unendlich wird. Außerdem wollen wir annehmen, daß die derivirten Functionen von $f(x)$ nicht alle zugleich verschwinden können; so gibt es einen oder mehrere, reelle, oder imaginäre Werthe von x, welche der Gleichung:

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

Genüge leisten.

Beweis. Es seien r und R die Moduli der Veränderlichen x und der Function $f(x)$, so daß allgemein:

$$x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t), \tag{2}$$

und:

$$f(x) = f[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)] = R(\cos T + \sqrt{-1}\sin T), \tag{3}$$

wo t und T zwei reelle Bogen bezeichnen. Da die Function $f(x)$ nach der Voraussetzung für alle endlichen Werthe des Modulus r endlich bleiben, und für $r = \infty$ immer unendlich groß werden muß; so ist klar, daß der Modulus R dieselben Bedingungen erfüllen wird. Hieraus folgt, daß es unter den Werthen von R einen geben wird, welcher kleiner ist als alle übrigen, und einem oder mehrern endlichen Werthen von x entspricht. Dieser kleinste Werth von R ist genau gleich Null. Denn wenn ein endlicher Werth von x für die Function $f(x)$ einen von Null verschiedenen Modulus gibt, so kann man nach Lehrsatz 5 der vorhergehenden Vorlesung der Veränderlichen x jedesmal einen solchen unendlich kleinen Zu-

wachs Δx geben, daß der Modulus von $f(x+\Delta x)$ kleiner wird, als der von $f(x)$. Folglich hat alsdann der Modulus von $f(x)$ nicht den möglichst kleinsten Werth. Folglich ist der kleinste Werth von R, wenn die im Lehrsatz 1 ausgesprochenen Bedingungen erfüllt werden, gleich Null, und die endlichen Werthe von x, welche $R=0$ entsprechen, leisten der Gleichung (1) Genüge.

Der Lehrsatz 1 läßt sich unmittelbar auf ganze Functionen der Veränderlichen x anwenden. Denn es sei $f(x)$ eine ganze Function des Grades n, d. h. von der Form:

$$(4) \quad f(x)=a_0 x^n+a_1 x^{n-1}+a_2 x^{n-2}+\ldots a_{n-1} x+a_n,$$

wo n eine ganze Zahl bezeichnet, und a_0, a_1, $a_2 \ldots$ reelle oder imaginäre Constanten sind, wovon die erste nicht Null sein darf. Diese Function $f(x)$ bleibt endlich und stetig für alle reellen, oder imaginären endlichen Werthe von x, wie auch ihre abgeleiteten Functionen der verschiedenen Ordnungen, und die der n^{ten} Ordnung

$$(5) \quad f^{(n)}(x)=1.2.3\ldots n\, a_0$$

ist eine Constante, aber von Null verschieden. Bezeichnet man ferner die Moduli der Coefficienten a_0, a_1, $a_2 \ldots a_n$ durch ρ_0, ρ_1, $\rho_2 \ldots \rho_n$ und setzt folglich:

$$(6) \quad a_0=\rho_0(\cos\tau_0+\sqrt{-1}\sin\tau_0), \; a_1=\rho_1(\cos\tau_1+\sqrt{-1}\sin\tau_1) \ldots . a_n=\rho_n(\cos\tau_n+\sqrt{-1}\sin\tau_n),$$

so folgt aus der Gleichung (4) und aus (2), (3), (6):

$$(7) \quad R(\cos T+\sqrt{-1}\sin T)$$
$$=\rho_0 r^n[\cos(nt+\tau_0)+\sqrt{-1}\sin(nt+\tau_0)]$$
$$+\rho_1 r^{n-1}(\cos[(n-1)t+\tau_1]+\sqrt{-1}\sin[(n-1)t+\tau_1])+\ldots$$
$$\ldots\rho_n(\cos\tau_n+\sqrt{-1}\sin\tau_n),$$

oder was dasselbe ist:

$$(8) \quad \begin{cases} R\cos T=\rho_0 r^n\cos(nt+\tau_0) \\ \qquad +\rho_1 r^{n-1}\cos((n-1)t+\tau_1)+\ldots+\rho_n\cos\tau_n, \\ R\sin T=\rho_0 r^n\sin(nt+\tau_0) \\ \qquad +\rho_1 r^{n-1}\sin((n-1)t+\tau_1)+\ldots+\rho_n\sin\tau_n. \end{cases}$$

Man findet also:

$$(9) \quad R^2=[\rho_0 r^n\cos(nt+\tau_0)$$
$$+\rho_1 r^{n-1}\cos((n-1)t+\tau_1)+\ldots+\rho_n\cos\tau_n]^2$$
$$+[\rho_0 r^n\sin(nt+\tau_0)$$
$$+\rho_1 r^{n-1}\sin((n-1)t+\tau_1)+\ldots+\rho_n\sin\tau_n]^2,$$

oder einfacher:

$$(10)\quad R^2 = r^{2n}\left\{\rho_0^2 + \frac{2\rho_0\rho_1\cos(t+\tau_0-\tau_1)}{r}\right.$$

$$\left. + \frac{\rho_1^2 + 2\rho_0\rho_2\cos(2t+\tau_0-\tau_2)}{r^2} + \ldots\right\}.$$

Gibt man nun dem Modulus r der Veränderlichen x unendlich große Werthe, so wächst der erste Factor des vorhergehenden Werthes von R^2 unendlich, während sich der zweite einer bestimmten, von Null verschiedenen endlichen Grenze ρ_0^2 nähert. Folglich wird der Werth von R^2 und seine Quadratwurzel, oder der Modulus R der Function $f(x)$ mit der Function selbst unendlich. Mithin gibt es nach Lehrsatz 1 einen oder mehrere reelle oder imaginäre Werthe von x, welche der Gleichung:

$$(11)\quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots . a_{n-1} x + a'_n = 0$$

Genüge leisten.

Nur der Fall macht eine Ausnahme, wo

$$n = 0,\ f(x) = a_0$$

ist, und in welchem alle abgeleitete Functionen von $f(x)$ verschwinden.

Es sei nun x_0 einer der reellen oder imaginären Werthe von x, welche der Gleichung (11) Genüge leisten, so wird die ganze Function $f(x)$ durch den linearen Factor $x - x_0$ theilbar sein, und verrichtet man die Division, so wird man eine andere ganze Function zum Quotienten erhalten, welche wieder durch einen neuen Factor theilbar sein wird. Fährt man auf diese Weise fort, so wird die Function $f(x)$ des Grades n zuletzt in so viele Factoren des ersten Grades zerlegt sein, als die Zahl n Einheiten hat. Auch wird das Product dieser Factoren niemals Null, ohne daß einer derselben verschwindet, und da man, wenn jeder Factor gleich Null gesetzt wird, eine reelle oder imaginäre Wurzel der Gleichung (11) bestimmt, so kann man offenbar folgenden Satz aussprechen.

Lehrsatz 2. Wie die reellen oder imaginären Werthe der Constanten a_0, a_1, a_2... auch beschaffen sein mögen, die Gleichung:

$$(12)\quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots a_{n-1} x + a_n = 0,$$

hat immer n reelle oder imaginäre Wurzeln, und kann deren nicht mehr haben.

Wenn die Function $f(x)$ keine ganze ist, so kann man in vielen Fällen die Möglichkeit der Auflösung der Gleichung (1) noch nachweisen, wenn man sich auf einen der folgenden Sätze stützt.

Lehrsatz 3. Sei $f(x)$ eine Function von x, welche nebst ihren abgeleiteten Functionen der verschiedenen

Ordnungen, für alle endlichen reellen oder imaginären Werthe von x endlich und stetig bleibt, und wir wollen annehmen, daß die abgeleiteten Functionen von $f(x)$ nicht alle zugleich verschwinden können. Ferner sei $\psi(t)$ eine bestimmte Function des Winkels t, welche nicht nur continuirlich, sondern auch zwischen den Grenzen $t = -\pi$, $t = \pi$ reell und positiv bleibt, und welche an diesen beiden Grenzen denselben Werth bekommt. Wenn, während der Winkel t zwischen den Grenzen $-\pi$, $+\pi$ variirt, der Modulus des Ausdruckes:

$$(12) \qquad f[(\cos t + \sqrt{-1} \sin t)\,\psi(t)]$$

beständig größer bleibt, als der Modulus von $f(0)$; so kann man daraus schließen, daß die Gleichung (1) eine oder mehrere reelle oder imaginäre Wurzeln von der Form:

$$(13) \qquad x = \theta[(\cos t + \sqrt{-1} \sin t)\,\psi(t)]$$

gestattet, wo $\theta < 1$ ist.

Beweis. Denn läßt man in der Function:

$$f(x) = f[r(\cos t + \sqrt{-1} \sin t)].$$

r und t sich allmählich zwischen den Grenzen $r = 0$, $r = \psi(t)$; $t = -\pi$, $t = \pi$ ändern; so erhält man für $f(x)$ eine unendliche Menge von Werthen, wovon der Modulus des einen kleiner ist als die Moduli aller übrigen, einzeln genommen. Es seien r_0, t_0, die diesem kleinsten Modulus entsprechenden Werthe von r, t, und x_0 der correspondirende Werth von x; so muß r_0 kleiner sein als $\psi(t_0)$ und nicht gleich $\psi(t_0)$. Denn wäre:

$$r_0 = \psi(t_0),$$

so wäre der Modulus des Ausdruckes:

$$(14) \qquad f(x_0) = f[(\cos t_0 + \sqrt{-1} \sin t_0)\,\psi(t_0)]$$

nach der Voraussetzung größer als der von $f(0)$, d. h. größer als der Modulus, welchen man für $f(x)$ erhält, wenn man $r = 0$ setzt, was auch t sein mag. Ferner ist der Ausdruck (14) genau gleich Null; denn fände das Gegentheil statt, so könnte man nach Lehrsatz 5 der vorhergehenden Vorlesung dem Werthe:

$$(15) \qquad x_0 = r_0(\cos t_0 + \sqrt{-1} \sin t_0)$$

der Veränderlichen x ein unendlich kleines Increment i beilegen, daß der Modulus von $f(x_0 + i)$ kleiner würde, als der von $f(x_0)$. Da überdies r_0 kleiner als $\psi(t_0)$, und das Increment i sehr wenig von Null verschieden ist; so ist der Werth $f(x_0 + i)$ von $f(x)$ auch einer von denen, welche man erhält, wenn man r und t zwischen den Grenzen $r = 0$, $r = \psi(t)$; $t = -\pi$, $t = \pi$

variiren läßt. Folglich wäre $f(x_0)$ unter diesen letzten Werthen nicht derjenige, welcher den kleinsten Modulus hat. Also verschwindet der Ausdruck (14), wie auch sein Modulus, jedesmal wenn die im Lehrsatz 3 ausgesprochenen Bedingungen erfüllt werden können, und der obige, durch x_0 bezeichnete Werth von x leistet der Gleichung (1) Genüge. Nun ist aber dieser Werth von x einer von denjenigen, welche durch die Formel (13) ausgedrückt werden, weil der Modulus r_0 zwischen den Grenzen 0 und $\psi(t_0)$ liegt.

Anmerk. Damit der Lehrsatz 3 statt finde, ist es nicht nothwendig, daß die durch $\psi(t)$ bezeichnete Function für alle Werthe von t dieselbe Form behalte. Vermittelst dieser Bemerkung kann man die Schwierigkeiten beseitigen, welche sich bei der Anwendung dieses Lehrsatzes auf besondere Fälle darbieten könnten. Um die Begriffe zu fixiren, sei:

$$f(x) = e^x - x, \tag{16}$$

so findet man in dieser Voraussetzung:

$$f(0) = 1, \tag{17}$$

$$R(\cos T + \sqrt{-1}\sin T) = e^{r\cos t + r\sin t\sqrt{-1}} - (r\cos t + r\sin t\sqrt{-1}), \tag{18}$$

$$\left\{\begin{array}{l} R\cos T = e^{r\cos t}\cos(r\sin t) - r\cos t, \\ R\sin T = e^{r\cos t}\sin(r\sin t) - r\sin t; \end{array}\right. \tag{19}$$

$$R^2 = e^{2r\cos t} - 2re^{r\cos t}\cos(r\sin t - t) + r^2, \tag{20}$$

und folglich:

$$R^2 > e^{2r\cos t} - 2re^{r\cos t} + r^2. \tag{21}$$

Hieraus folgt 1) wenn man $r > 2$ und $\cos t$ negativ setzt:

$$R > r - e^{r\cos t} > r - 1 > 1; \tag{22}$$

2) wenn $\cos t$ positiv und größer als $\frac{l(r+1)}{r}$ gesetzt wird:

$$R > e^{r\cos t} - r > 1. \tag{23}$$

Es sei nun N irgend welche größere Zahl als 2, und

$$\nu = \text{arc.}\cos\frac{l(N+1)}{N}. \tag{24}$$

Soll der durch die Gleichung (20) für $r = \psi(t)$ bestimmte Werth von R größer werden, als der Modulus von $f(0)$, d. h. als die Einheit, für alle Werthe von t, welche 1) zwischen den Grenzen $t = -\pi$, $t = -\frac{1}{2}\pi$, oder zwischen den Grenzen $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$, 2) zwischen den Grenzen $t = -\nu$, $t = \nu$ liegen; so braucht man nur anzunehmen, daß sich die Function $\psi(t)$ zwischen denselben Grenzen auf eine constante Größe reducire, welche der Zahl

N gleich, oder größer als dieselbe ist. Anderer Seits, wenn n irgend eine ganze Zahl bezeichnet, und man bestimmt den Werth von r, wenn der Winkel t positiv bleibt, durch die Gleichung:

$$(25)\qquad r\sin t - t = n\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ oder } r = \frac{n\pi + \frac{\pi}{2} + t}{\sin t},$$

und wenn der Winkel t negativ wird, vermittelst der Gleichung:

$$(26)\qquad r\sin t - t = -\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right), \text{ oder } r = \frac{n\pi + \frac{\pi}{2} + t}{\sin(-t)};$$

so ist der durch die Gleichung (20) bestimmte Modulus R offenbar größer, als der Modulus r, und um so mehr größer, als die Zahl $\frac{\pi}{2} = 1{,}5707\ldots$

Mithin ist der Modulus R für alle zwischen den Grenzen $-\pi$, $+\pi$ liegende Werthe von t größer, als die Einheit, wenn man die Function $\psi(t)$ so bestimmt, daß 1) zwischen den Grenzen $t = -\nu$, $t = \nu$:

$$(27)\qquad \psi(t) = \frac{n\pi + \frac{\pi}{2} + \nu}{\sin \nu},$$

2) zwischen den Grenzen $t = \nu$, $t = \pi - \nu$:

$$(28)\qquad \psi(t) = \frac{n\pi + \frac{\pi}{2} + t}{\sin t},$$

3) zwischen den Grenzen $t = -(\pi - \nu)$, $t = -\nu$:

$$(29)\qquad \psi(t) = \frac{n\pi + \frac{\pi}{2} - t}{\sin(-t)},$$

4) zwischen den Grenzen $t = -\pi$, $t = -(\pi - \nu)$, oder zwischen den Grenzen $t = \pi - \nu$, $t = \pi$:

$$(30)\qquad \psi(t) = \frac{n\pi + \frac{\pi}{2} + \pi - \nu}{\sin(\pi - \nu)} = \frac{n\pi + \frac{3\pi}{2} - \nu}{\sin \nu}$$

ist, und wenn man ferner die Zahl n so wählt, daß der kleinste, durch die Gleichung (27) oder (30) gegebene Werth von $\psi(t)$, nämlich:

$$\frac{n\pi + \frac{\pi}{2} + \nu}{\sin \nu},$$

der Bedingung:

$$(31) \qquad \frac{n\pi + \frac{\pi}{2} + \nu}{\sin \nu} > N$$

Genüge leistet.

Obgleich die durch das System der Gleichungen (27), (28), (29), (30) bestimmte Function $\psi(t)$ mit dem Werthe von t die Form ändert, so bleibt sie doch nicht nur endlich und positiv, sondern auch zwischen diesen Grenzen stetig, d. h. sie ändert sich allmählich, wenn man den Winkel t zu- oder abnehmen läßt. Noch wollen wir bemerken, daß sie für $t = -\pi$ und $t = \pi$ denselben Werth bekommt, und daß die abgeleiteten Functionen von $e^x - x$, nämlich $e^x - 1$, e^x nicht zu gleicher Zeit verschwinden können. Folglich hat die Gleichung:

$$(32) \qquad e^x - x = 0$$

nach Lehrsatz 3 reelle oder imaginäre Wurzeln, unter welchen es wenigstens eine gibt, deren Modulus kleiner ist, als der größte Werth von $\psi(t)$, welchen die Gleichungen (27), (28), (29), (30) geben.

Setzt man $N = 2$, so gibt die Gleichung (24):

$$\nu = \text{arc. cos} \frac{l(3)}{2} = \text{arc. cos}\,(0{,}549306\ldots) = 0{,}98926\ldots,$$

und die Bedingung (31) wird erfüllt, selbst wenn man $n = 0$ setzt. Alsdann ist der größte der Werthe von $\psi(t)$, welche durch die Gleichungen (27), (28), (29), (30) bestimmt werden:

$$\frac{\frac{3\pi}{2} - \nu}{\sin \nu} = 4{,}455\ldots$$

Folglich gibt es unter den Wurzeln der Gleichung (1) wenigstens eine, welche einen kleinern Modulus als die Zahl 4,455... hat.

Das eben Gesagte ist hinreichend, um zu zeigen, welchen vortheilhaften Gebrauch man von dem Lehrsatze 3 machen kann, um sich zu überzeugen, daß eine transcendente Gleichung reelle oder imaginäre Wurzeln hat, und die obern Grenzen ihrer kleinsten Moduli zu bestimmen. Unter den Gleichungen, für welche die Existenz einer oder mehrerer Wurzeln leicht nachgewiesen werden kann, wollen wir noch die folgenden anführen:

$$(33) \qquad e^x = x\sqrt{-1},\ e^{-x} + e^x = 0,\ \sin x = 2,\ \text{etc}\ldots$$

$$(34) \qquad e^{-x} = x,\ e^{-x} = x^2,\ e^x - e^{-x} = \sin x\ \text{etc}\ldots$$

und es würde leicht zu erkennen sein, daß die Gleichungen (32) und (33) nur imaginäre Wurzeln haben können.

Uebrigens kann man durch ähnliche Betrachtungen, wie die bei dem Beweise des Lehrsatzes 3 angewandten, auch leicht folgenden Satz beweisen.

Lehrsatz 4. Es seien

(2) $$x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$$

eine imaginäre Veränderliche, r der Modulus derselben, und $\varphi(t)$, $\psi(t)$ zwei Functionen von t, welche für alle zwischen den Grenzen $t = t_1$, $t = t_2$ liegende Werthe von t nicht nur continuirlich, sondern auch reell und positiv bleiben. Ferner sei

(3) $$f(x) = f[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)]$$

eine Function von x, die zwischen den Grenzen:

(35) $$t = t_1\,,\ t = t_2\,,\ r = \varphi(t)\,,\ r = \psi(t)$$

endlich und stetig bleibt, wie auch ihre derivirten Functionen der verschiedenen Ordnungen, und es wird angenommen, daß die abgeleiteten Functionen von $f(x)$ niemals alle zugleich verschwinden. Wenn man den Winkel τ zwischen den Grenzen t_1, t_2 und den Modulus r zwischen den Grenzen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ so wählen kann, daß der Modulus des Ausdruckes (3) stets einen Werth behält, welcher größer ist, als der Werth des Modulus von:

(36) $$f[r(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau)],$$

während man r zwischen den Grenzen $\varphi(t)$ $\psi(t)$ variiren läßt und t einen der Werthe t_1, t_2 gibt, oder während man t zwischen den Grenzen t_1, t_2 sich ändern läßt, und r einen der Werthe $\varphi(t)$, $\psi(t)$ beilegt; so wird die Gleichung (1) eine oder mehrere reelle oder imaginäre Wurzeln haben, welche den zwischen den Grenzen (35) liegenden Werthen von r und t entsprechen.

Anmerk. 1. Wenn man in dem vorhergehenden Lehrsatze die Winkel t_1, t_2 auf die beiden Größen $-\pi$, $+\pi$ reducirt, so muß angenommen werden, daß jede der beiden Functionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ für $t = -\pi$ und für $t = +\pi$ denselben Werth bekommt. Wenn in dieser Voraussetzung $\varphi(t) = 0$ wäre, so käme man offenbar wieder auf den Lehrsatz (3).

Anmerk. 2. Wenn man im Lehrsatze 4 die Functionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ auf zwei constante Größen r_1, r_2 reducirt, so bekommt man folgenden neuen Satz:

Lehrsatz 5. Es sei

(2) $$x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$$

eine imaginäre Veränderliche, deren Modulus r bezeichnet. Ferner sei $f(x)$ eine Function von x, welche zwischen den Grenzen:

$$(37)\qquad r=r_1\,,\ r=r_2\,,\ t=t_1\,,\ t=t_2$$

nebst ihren abgeleiteten Functionen der verschiedenen Ordnungen endlich und stetig bleibt, und wir wollen annehmen, daß diese abgeleiteten Functionen von $f(x)$ nicht alle zugleich verschwinden. Wenn man den Winkel τ zwischen den Grenzen t_1, t_2 und den Modulus r zwischen den Grenzen r_1, r_2 so wählen kann, daß die Function:

$$(3)\qquad f(x)=f[r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)]$$

immer einen Modulus behält, der größer ist als der des Ausdruckes (36), während man r zwischen den Grenzen r_1, r_2 variiren läßt und t einen der Werthe t_1, t_2 gibt, oder während man t zwischen den Grenzen t_1, t_2 sich ändern läßt, und r einen der Werthe r_1, r_2 beilegt; so hat die Gleichung (1) eine oder mehrere reelle oder imaginäre Wurzeln, welche den zwischen den Grenzen (37) liegenden Werthen von t entsprechen.

Mit dem Lehrsatz 5 könnte man noch den folgenden verbinden, der sich eben so leicht, und auf dieselbe Art beweisen läßt, wie die Lehrsätze 3, 4.

Lehrsatz 6. Es sei x eine imaginäre Veränderliche, und p, q seien zwei reelle Veränderliche, welche mit der erstern durch die Gleichung:

$$(38)\qquad x=p+q\sqrt{-1}$$

verbunden sind. Ferner sei

$$(39)\qquad f(x)=f(p+q\sqrt{-1})$$

eine Function von x, welche mit ihren abgeleiteten Functionen der verschiedenen Ordnungen zwischen den Grenzen:

$$(40)\qquad p=p_1\,,\ p=p_2\,;\ q=q_1\,,\ q=q_2$$

endlich und stetig bleibt, und es wird vorausgesetzt, daß die abgeleiteten Functionen von $f(x)$ nicht alle zugleich verschwinden. Wenn man die Größe λ zwischen den Grenzen p_1, p_2 und die Größe μ zwischen den Grenzen q_1, q_2 so wählen kann, daß die Function (39) beständig einen größern Modulus behält, als der des Ausdruckes:

$$(41)\qquad f(\lambda+\mu\sqrt{-1}),$$

während man p zwischen den Grenzen p_1, p_2 sich ändern läßt und q einen der Werthe q_1, p_2 beilegt, oder während man q zwischen den Grenzen q_1, q_2 sich ändern läßt und p einen der Werthe p_1, p_2 beilegt; so hat die Gleichung (1) eine oder mehrere imaginäre Wurzeln, welche den zwischen den Grenzen (40) liegenden Werthen von p und q entsprechen.

Wenn die Gleichung (1) reelle oder imaginäre Wurzeln hat, deren Moduli sehr groß sind; so können die Lehrsätze 4 und 5 dazu dienen, die Existenz dieser Wurzeln nachzuweisen, und genäherte Werthe derselben zu finden. Zum Beweise dieser Behauptung wollen wir wieder

$$f(x) = e^x - x$$

setzen. Alsdann werden jeder Wurzel der Gleichung (1) Werthe von r und t entsprechen, für welche der durch die Formel (20), oder durch:

$$(42) \quad R^2 = [e^{r\cos t} - r\cos(r\sin t - t)]^2 + [r\sin(r\sin t - t)]^2$$

bestimmte Modulus R verschwindet.

Da ferner die Summe zweier Quadrate nur dann Null werden kann, wenn jedes für sich gleich Null wird; so ist wegen $R = 0$:

$$(43) \quad r\sin(r\sin t - t) = 0, \quad e^{r\cos t} = r\cos(r\sin t - t),$$

welche Gleichungen man auf:

$$(44) \qquad r\sin t - t = \pm 2n\pi, \quad e^{r\cos t} = r$$

reduciren kann, indem man durch n eine ganze Zahl bezeichnet, und erwägt, daß man, um der zweiten der Gleichung (43) Genüge zu leisten, nothwendig den Modulus r von Null verschieden, und die Größe $\cos(r\sin t - t)$ positiv annehmen muß.

Gesetzt nun, die Zahl n und folglich auch der Modulus r bekomme einen sehr großen Werth. Da der reelle Ausdruck:

$$\frac{l(r)}{r},$$

welcher nur ein einziges, $r = e$ entsprechendes Maximum gestattet, von diesem Maximum aus für wachsende Werthe von r unendlich abnimmt; so reducirt sich derselbe, oder der aus der zweiten der Gleichungen (44) abgeleitete Werth von cos t, fast auf Null. Also ist der zwischen den Grenzen $-\pi$, $+\pi$ liegende Winkel t wenig von $\pm\frac{\pi}{2}$ verschieden, und die Formeln (44) geben sehr nahe:

$$(45) \qquad r = 2n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \cos t = \frac{l\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}.$$

Wir können also schließen, daß, wenn die Gleichung (1) Wurzeln hat, deren Moduli sehr groß sind, diese Wurzeln Werthen von r und t entsprechen, die wenig von den durch die Gleichungen (45) bestimmten verschieden sind. Die Existenz dieser Wurzeln läßt sich nun aber leicht auf folgende Weise vermittelst des Lehrsatzes 5 nachweisen.

Wir wollen, um die Begriffe zu fixiren, den Winkel t positiv annehmen. Alsdann ist, wenn man die durch die Gleichungen (45) gegebenen Werthe von r und t durch r und τ bezeichnet:

$$(46)\qquad r = 2\mathrm{n}\pi + \frac{\pi}{2},\quad \tau = \mathrm{arc.\,cos}\left\{\frac{\mathrm{l}\left(2\mathrm{n}\pi+\frac{\pi}{2}\right)}{2\mathrm{n}\pi+\frac{\pi}{2}}\right\}.$$

Man findet also:

$$(47)\qquad e^{r\cos\tau} = r,$$

und aus der Gleichung (40) folgt, wenn man $\mathrm{r}=r$, $\mathrm{t}=\tau$ setzt:

$$(48)\quad \mathrm{R}^2 = r^2\,[2 - 2\cos(r\sin\tau - \tau)] = 4r^2\sin^2\left(\frac{r\sin\tau-\tau}{2}\right),$$

oder, was einerlei ist:

$$(49)\qquad \left(\frac{\mathrm{R}}{r}\right)^2 = \left\{2\sin\left(\frac{r\sin\tau-\tau}{2}\right)\right\}^2.$$

Ueberdies bekommt $\cos\tau$, wie auch die Differenz $\frac{\pi}{2}-\tau$, für sehr große Werthe der ganzen Zahl n einen sehr kleinen numerischen Werth, und dasselbe gilt nicht nur von dem Producte:

$$(50)\quad r\cos^2\tau = \frac{\left[\mathrm{l}\left(2\mathrm{n}\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right]^2}{2\mathrm{n}\pi+\frac{\pi}{2}} = 4\left\{\frac{\mathrm{l}\sqrt{2\mathrm{n}\pi+\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2\mathrm{n}\pi+\frac{\pi}{2}}}\right\}^2,$$

sondern auch von den beiden Ausdrücken:

$$(51)\qquad r\sin\tau - \tau - 2\mathrm{n}\pi = \frac{\pi}{2} - \tau - \frac{r\cos^2\tau}{1+\sin\tau},$$

$$(52)\quad \sin\left(\frac{r\sin\tau-\tau}{2}\right) = +\sin\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\tau-\frac{r\cos^2\tau}{1+\sin\tau}\right)\right\}.$$

Folglich reducirt sich der aus der Gleichung (49) hergeleitete Werth von $\frac{\mathrm{R}}{r}$ auf Null. Setzen wir nun:

$$(53)\qquad \mathrm{r} = r + \mathrm{u},\quad \cos\mathrm{t} = (1-\mathrm{v})\cos\tau,$$

und es seien r_1, r_2, t_1, t_2 die Werthe, welche die Veränderlichen

r und t bekommen, wenn man successive:

$$u=-\pi,\ u=\pi,\ v=-1,\ v=1,$$

setzt, daß:

(54) $$r_1=r-\pi,\ r_2=r+\pi,$$

und:

(55) $$\cos t_1=2\cos\tau,\ \cos t_2=0,$$

oder:

$$t_1=\text{arc.}\cos\frac{2l\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)}{2n\pi+\frac{\pi}{2}},\quad t_2=\frac{\pi}{2}$$

ist.

Offenbar liegt der Modulus r zwischen r_1, r_2, und der Winkel τ zwischen den Grenzen t_1, t_2, und wenn der Werth von u zwischen die Grenzen $-\pi$, $+\pi$ eingeschlossen wird; so folgt aus der Formel (21) 1) für $t=t_1$:

(57) $$\left(\frac{R}{r}\right)^2>\left\{\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{1+\frac{2u}{r}}-\left(1+\frac{u}{r}\right)\right\}^2,$$

2) für $t=t_2=\frac{\pi}{2}$:

(58) $$\left(\frac{R}{r}\right)^2>\left(1+\frac{u-1}{r}\right)^2.$$

Wenn man anderer Seits den Werth von v zwischen die Grenzen -1, $+1$ einschließt, und u einen der Werthe $-\pi$, $+\pi$ gibt; so ist die Größe:

(59) $$r\sin t-t=r-t-\frac{r\cos^2 t}{1+\sin t}=$$

$$(2n\mp1)\pi+\frac{\pi}{2}-t-\left(1\mp\frac{\pi}{2}\right)(1-v)^2\frac{r\cos^2\tau}{1+\sin t}$$

sehr wenig von $(2n\mp1)\pi$ verschieden. Folglich ist $\cos(r\sin t-t)$ sehr wenig von -1 verschieden, und aus der Formel (20) folgt:

(60) $$R^2>r^2,$$

(61) $$\left(\frac{R}{r}\right)^2>\left(1\mp\frac{\pi}{r}\right)^2.$$

Endlich ist klar, daß, da die Zahlen n, r sehr groß sind, jeder Werth von $\frac{R}{r}$, welcher einer der Bedingungen (57), (58), (61) Genüge leistet, entweder sehr groß, oder wenig von der Einheit

verschieden ist; und folglich größer ist, als der aus der Gleichung (49) abgeleitete Werth von $\frac{R}{r}$. Mithin gibt die Gleichung (48) einen Werth von R, der kleiner ist, als alle die, welche den Gleichungen (57), (58), (61) Genüge leisten; und man kann aus dem Lehrsatze 5 schließen, daß die Gleichung (32) Wurzeln hat, welche zwischen den Grenzen (54) liegenden Werthen von r, und zwischen den Grenzen (56) liegenden Werthen von t entsprechen.

Uebrigens ist es, um zu dem vorigen Schlusse zu gelangen, nicht durchaus nöthig, der Zahl n sehr große Werthe zu geben, und es ist schon hinreichend, für n irgend eine ganze, von Null verschiedene Zahl zu nehmen. In der That folgt aus den Gleichungen (46), (49), wenn man n = 1 setzt:

$$(62) \qquad r = \frac{5\pi}{2} = 7{,}85398\ldots, \quad \tau = (0{,}83095\ldots)\frac{\pi}{2} = 1{,}30526\ldots$$

$$(63) \qquad \frac{R}{r} = 2\sin\frac{r\sin\tau - \tau}{2} = 2\sin\frac{6{,}27346}{2} = 0{,}00972\ldots,$$

während die Formeln (57), (58) für Werthe von u, die zwischen den Grenzen $-\pi$, $+\pi$ liegen

$$(64) \quad \frac{R}{r} > \left(\frac{5\pi}{2}\right)^{1+\frac{4u}{5\pi}} - \left(1+\frac{2u}{5\pi}\right) > \left(\frac{5\pi}{2}\right)^{\frac{1}{5}} - \left(1+\frac{2}{5}\right) > 0{,}110\ldots,$$

$$(65) \qquad \frac{R}{r} > 1 + \frac{2(u-1)}{5\pi} > 1 - \frac{2}{5}.\frac{\pi+1}{\pi} > 0{,}47\ldots$$

geben.

Gibt man überdies r den Werth $\frac{5\pi}{2} - \pi = \frac{3\pi}{2}$, und läßt den Winkel t zwischen den Grenzen:

$$(66) \qquad t_1 = \text{arc.}\cos(2\cos\tau) = (0{,}6482\ldots.)\frac{\pi}{2}, \quad t_2 = \frac{\pi}{2}$$

sich ändern; so wächst die Differenz:

$$r\sin t - t,$$

deren Maxima und Minima den Werthen von $r\cos t - 1 = 0$ entsprechen, von $t = t_1$ bis $t = \text{arc.}\cos\frac{1}{r} = \text{arc.}\cos\frac{2}{3\pi}$, und nimmt von diesem letzten Werthe von t an bis $t = t_2$ ab. Folglich bleibt sie zwischen der kleinsten der Größen:

$$(66) \qquad r\sin t_1 - t_1 = (0{,}9526\ldots)\pi, \quad r\sin t_2 - t_2 = \pi,$$

welche beide größer sind als $\frac{\pi}{2}$, und der Größe:

$$(68)\qquad \sqrt{r^2-1} - \text{arc.}\cos\frac{1}{r} = (1{,}0339\ldots)\pi,$$

welche kleiner ist als $\frac{3\pi}{2}$, enthalten. Folglich ist $\cos(r\sin t - t)$ negativ, und die Formel (20) hat noch die Bedingung (61) zur Folge, aus welcher sich ergibt:

$$\frac{R}{r} > 1 - \frac{\pi}{r} = 1 - \frac{2}{5},$$

d. h.:

$$(69)\qquad \frac{R}{r} > 0{,}6.$$

Desgleichen, wenn man r den Werth $\frac{5\pi}{2} + \pi = \frac{7\pi}{2}$ beilegt, und läßt den Winkel t zwischen den Grenzen (66) variiren; so liegt die Differenz $r\sin t - t$ zwischen der kleinsten der Größen:

$$(70)\qquad r\sin t_1 - t_1 = (2{,}6549\ldots)\pi,\quad r\sin t_2 - t_2 = 3\pi,$$

welche beide größer sind als $\frac{5\pi}{2}$, und der Größe:

$$(71)\qquad \sqrt{r^2-1} - \text{arc.}\cos\frac{1}{r} = (3{,}0146\ldots)\pi,$$

welche kleiner ist, als $\frac{7\pi}{2}$. Folglich ist $\cos(r\sin t - t)$ immer negativ, und die Formel (20) hat die Bedingung (61) zur Folge, aus welcher folgt:

$$\frac{R}{r} > 1 + \frac{\pi}{r} = 1 + \frac{2}{5},$$

oder:

$$(72)\qquad \frac{R}{r} > 1{,}4.$$

Da hiernach der durch die Gleichung (63) bestimmte Werth von R kleiner bleibt, als alle, welche den Bedingungen (64), (65), (69), (72) genügen; so leuchtet ein, daß die Gleichung (32) wenigstens eine Wurzel hat, deren Modulus zwischen den Grenzen:

$$(73)\qquad \frac{5\pi}{2} - \pi = \frac{3\pi}{2} = 4{,}71238\ldots \text{ und}$$

$$\frac{5\pi}{2} + \pi = \frac{7\pi}{2} = 10{,}99557\ldots$$

liegt. Anderer Seits folgt aus den Formeln (46) und (50), wenn

man $n=2$ oder $n>2$ setzt:

$$(74)\qquad \cos\tau = \text{oder} < 0{,}18736\ldots,\ r\cos^2\tau = \text{oder} < 0{,}4962\ldots,\ 1+\sin\tau = \text{oder} > 1{,}9822\ldots$$

und folglich:

$$(75)\ \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right) = \text{oder} < 0{,}094\ldots,\ \frac{1}{2}\cdot\frac{r\cos^2\tau}{1+\sin\tau} = \text{oder} < 0{,}125\ldots;$$

dann folgt aus den Formeln (49) und (52):

$$(76)\qquad \frac{R}{r} < 2\sin(0{,}125\ldots) < 2(0{,}125\ldots) < 0{,}250\ldots$$

Nun geben aber die Formeln (57), (58) in derselben Hypothese für die zwischen den Grenzen $-\pi$, $+\pi$ liegenden Werthe von u:

$$(77)\qquad \frac{R}{r} > \left(\frac{9\pi}{2}\right)^{1-\frac{4}{9}} - \left(1+\frac{2}{9}\right) > 3{,}133\ldots$$

$$(78)\qquad \frac{R}{r} > 1 - \frac{2}{9}\cdot\frac{\pi+1}{\pi} > 0{,}707\ldots$$

Läßt man ferner v in der Formel (59) zwischen den Grenzen -1, $+1$ variiren, so bleibt die Summe der Größen:

$$t,\ \left(1\mp\frac{\pi}{r}\right)(1-v)^2\,\frac{r\cos^2\tau}{1+\sin t}$$

stets kleiner als die der Größen:

$$(79)\quad \frac{\pi}{2},\ \left(1+\frac{2}{9}\right)4\,\frac{r\cos^2\tau}{1+\sqrt{1-4\cos^2\tau}} < (0{,}8015\ldots)\,\frac{\pi}{2},$$

und folglich kleiner als die Zahl π. Folglich liegt die Differenz zwischen dem Ausdrucke $r\sin t - t$ und dem Producte $(2n\mp1)\pi$ innerhalb der Grenzen $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\pi=-\frac{\pi}{2}$; und da also $\cos(r\sin t - t) < 0$ ist; so hat man nach der Formel (20) noch die Bedingung (61), aus welcher folgt:

$$(80)\qquad \frac{R}{r} > 1 - \tfrac{2}{9} > 0{,}777\ldots$$

Weil endlich der aus der Formel (76) abgeleitete Werth von r kleiner bleibt als alle, welche den Bedingungen (78), (78), (80) Genüge leisten; so können wir behaupten, daß die Gleichung (32) wenigstens eine Wurzel hat von der Form:

$$x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t),$$

wobei der Modulus r zwischen den Grenzen:

$$(81)\qquad (2n-1)\pi+\frac{\pi}{2},\ (2n+1)\pi+\frac{\pi}{2},$$

und der Winkel t zwischen den Grenzen:

$$(82)\qquad \text{arc. cos}\,\frac{2\,l\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)}{2n\pi+\frac{\pi}{2}},\ \frac{\pi}{2}$$

liegt.

Wenn die Function $f(x)$ unter reeller Form erscheint, so folgt aus der Gleichung (26) der vorhergehenden Vorlesung im Allgemeinen auch die Formel (94) derselben Vorlesung. Also ergibt sich daraus, wenn man

$$(83)\qquad f[r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)]=R(\cos T+\sqrt{-1}\sin T)$$

setzt, R eine positive Größe und T einen reellen Bogen bedeutet:

$$(84)\qquad f[r(\cos t-\sqrt{-1}\sin t)]=R(\cos T-\sqrt{-1}\sin T).$$

Da hiernach die beiden Ausdrücke (83), (84) immer zu gleicher Zeit verschwinden, wenn der Modulus R verschwindet, und im entgegengesetzten Falle nicht verschwinden können; so ist klar, daß die Gleichung (1) in der gemachten Voraussetzung keine imaginäre Wurzel von der Form:

$$x=r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)$$

haben kann, wenn sie nicht zu gleicher Zeit eine der ersten conjugirte imaginäre Wurzel von der Form:

$$x=r(\cos t-\sqrt{-1}\sin t)$$

hat.

Es ist jedoch wohl zu bemerken, daß sich diese beiden imaginären Wurzeln der Gleichung (1) auf eine einzige reelle, positive, oder negative Wurzel reduciren, wenn $t=0$ oder $t=\pm\pi$ ist.

Aus dem eben Gesagten folgt, daß, wenn die Function $f(x)$ unter reeller Form erscheint, die imaginären Wurzeln der Gleichung (1) immer paarweise einander conjugirt, d. h. von der Form:

$$(85)\qquad x=r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t),\ x=r(\cos t-\sqrt{-1}\sin t),$$

sind, und denselben Modulus r haben. Dieses ist z. B. der Fall, wenn man für $f(x)$ eine ganze Function, oder eine der transcendenten Functionen:

$$(86)\qquad e^{x}-x,\ x-e^{-x},\ e^{-x}+x^{2},\ x^{2}-e^{-x},\ \text{etc}\ldots$$

setzt.

Setzt man, um die Begriffe zu fixiren:

$$f(x)=e^{x}-x,$$

so hat die auf die Form (32) reducirte Gleichung (1) offenbar nur imaginäre Wurzeln. Denn da x reell ist, so kann die Differenz:

$$e^x - x$$

nur für positive Werthe von x verschwinden, und für solche Werthe ist offenbar:

$$x < e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc}\ldots$$

Nun ist aber eben bewiesen, daß die Gleichung (32), wenn n irgend welche ganze Zahl bedeutet, immer eine imaginäre Wurzel von der Form hat:

$$x = r(\cos t + \sqrt{-1} \sin t),$$

wobei der Modulus r zwischen den Grenzen (81) und der Winkel t zwischen den Grenzen (82) liegt. Folglich hat diese Gleichung noch eine andere Wurzel von derselben Form, in welcher der Modulus r zwischen den Grenzen (81) und der Winkel t zwischen den Grenzen:

$$(87) \qquad -\text{arc.}\cos \frac{2l\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, \; -\frac{\pi}{2}$$

liegt.

Wenn die in einem der Lehrsätze 1, 3 oder 4 und 5 ausgesprochenen Bedingungen erfüllt werden, so ist es leicht, die Gleichung (1) näherungsweise aufzulösen. Zu diesem Zwecke betrachte man Null, oder den imaginären Ausdruck $r(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau)$ als einen ersten genäherten Werth einer Wurzel der Gleichung (1); dann setze man in der Formel (91) oder (92) der dreizehnten Vorlesung $x = 0$ oder $= r(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin t)$, und nehme r hinreichend klein an, daß der Modulus von $f(x + \Delta x)$ kleiner werde, als der Modulus R von $f(x)$. Hierauf kann der imaginäre Ausdruck $x + \Delta x$ als ein zweiter genäherter Werth der gesuchten Wurzel betrachtet werden. Wiederholt man nun die Operation, durch welche dieser zweite Werth aus dem ersten abgeleitet wird, mehrere Male; so bekommt man einen dritten, vierten.... genäherten Werth. Es sei nun:

$$(88) \qquad x_1, \; x_2, \; x_3, \ldots.$$

ein erster, zweiter, dritter.... genäherter Werth der gesuchten Wurzel, so convergiren die Glieder der Reihe (88), während die Moduli der Ausdrücke:

$$(89) \qquad f(x_1), \; f(x_2), \; f(x_3), \ldots.$$

immer kleiner werden, gegen eine gewisse Grenze, welche nothwendig ein endlicher Werth von x ist, der der Gleichung (1) Genüge leistet.

Es verdient hier wieder erinnert zu werden, daß in den For-

meln (91) und (92) der vorhergehenden Vorlesung, T, $T_1 \ldots T_n$ reelle Bogen bezeichnen, welche mit den Modulis R, $R_1 \ldots R_n$ durch die Gleichungen:

$$(90)\quad \begin{cases} f(x) = R(\cos T + \sqrt{-1}\sin T), \\ f'(x) = R_1(\cos T_1 + \sqrt{-1}\sin T_1), \ldots \\ f^{(n)}(x) = R_n(\cos T_n + \sqrt{-1}\sin T_n) \end{cases}$$

verbunden sind.

Wenn der erste genäherte Werth von x so beschaffen ist, daß die Größe R sehr klein, und die Größe R_1 merklich von Null verschieden ist; so ist es gewöhnlich hinreichend, um den Modulus von $f(x+\Delta x)$ kleiner zu machen als den von $f(x)$, in der Formel (91) der dreizehnten Vorlesung $\rho = \frac{R}{R_1}$ zu setzen; oder mit andern Worten, es genügt

$$(91)\qquad \Delta x = -\frac{R(\cos T + \sqrt{-1}\sin T)}{R_1(\cos T_1 + \sqrt{-1}\sin T_1)} = -\frac{f(x)}{f'(x)}$$

zu setzen.

In der That, es sei:

$$(2)\qquad x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$$

der erste genäherte Werth von x,

$$(93)\qquad \Delta x = \rho(\cos\nu + \sqrt{-1}\,\nu\sin\nu),$$

ein diesem ersten Werthe beigelegtes, willkührliches Incrcment, und $\Phi(\rho)$ $X(\rho)$ die reellen Functionen des Modulus ρ, welche der Gleichung:

$$f[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t) + \rho(\cos\nu + \sqrt{-1}\sin\nu)] = \Phi(\rho) + \sqrt{-1}\,X(\rho)\,0$$

genügen, wenn der Modulus ρ allein als veränderlich angesehen wird; so folgt aus der Formel (39) Vorles. 13, wenn man $n=1$ setzt, und durch θ_1, θ_2 zwei kleinere Zahlen als die Einheit bezeichnet:

$$(94)\quad f[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t) + \rho(\cos\nu + \sqrt{-1}\sin\nu)] =$$
$$f[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t) + \rho(\cos\nu + \sqrt{-1}\sin\nu) f'[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)]$$
$$+ \tfrac{1}{2}\rho^2[\Phi''(\theta_1\rho) + \sqrt{-1}\,X''(\theta_2\rho)],$$

oder was dasselbe ist:

$$f(x+\Delta x) = R(\cos T \sqrt{-1}\sin T)$$
$$+ \rho R_1[\cos(\nu + T_1) + \sqrt{-1}\sin(\nu + T_1)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\rho^2[\Phi''(\theta_1\rho) + \sqrt{-1}\,X''(\theta_2\rho)].$$

Setzt man dann:

$$(96)\qquad \rho = \frac{R}{R_1},\quad \nu = \pi + T - T_1,$$

und folglich:

$$\Delta x = \rho(\cos\nu + \sqrt{-1}\sin\nu) =$$

$$-\frac{R(\cos T + \sqrt{-1}\sin T)}{R_1(\cos T_1 + \sqrt{-1}\sin T_1)} = -\frac{f(x)}{f'(x)},$$

so findet man:

$$(97)\quad \begin{cases} f(x+\Delta x) = \frac{1}{2}\rho^2[\Phi''(\theta_1\rho) + \sqrt{-1}X''(\theta_2\rho)] \\ \qquad = \frac{R^2}{2R_1^2}\left[\Phi''\left(\theta_1\frac{R}{R_1}\right) + \sqrt{-1}X''\left(\theta_2\frac{R}{R_1}\right)\right]. \end{cases}$$

Differenzirt man ferner die Formel (93) zwei Mal nach ρ, und setzt hierauf $\rho = 0$, so folgt:

$$(98)\ \Phi''(\rho) + \sqrt{-1}X''(\rho) = (\cos\nu + \sqrt{-1}\sin\nu)^2 f''[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t) + \rho(\cos\nu + \sqrt{-1}\sin\nu)],$$

und:

$$(99)\quad \begin{cases} \Phi''(0) + \sqrt{-1}X''(0) = \\ (\cos\nu + \sqrt{-1}\sin\nu)^2 f''[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin\nu)] \\ = R_2[\cos(2\nu + T_2) + \sqrt{-1}\sin(2\nu + T_2)]. \end{cases}$$

Da überdies das Verhältniß $\frac{R}{R_1}$ nach der Voraussetzung sehr klein ist, so differirt der zweite Theil der Gleichung (97) im Allgemeinen sehr wenig von dem Producte:

$$\frac{R^2}{2R_1^2}[\Phi''(0) + \sqrt{-1}X''(0)] =$$

$$\frac{R^2 R_2}{2R_1^2}[\cos(2\nu + T_2 + \sqrt{-1}\sin(2\nu + T_2)].$$

Folglich ist der Modulus von $f(x+\Delta x)$ im Allgemeinen sehr wenig von der Größe:

$$(100)\qquad \frac{R^2 R_2}{2R_1^2} = \frac{RR_2}{2R_1^2}R$$

verschieden, welche in Vergleich zu R selbst sehr klein ist, wenigstens, wenn der Modulus R einen endlichen Werth behält.

Um von den vorhin aufgestellten Prinzipien eine Anwendung zu zeigen, wollen wir annehmen, es solle, nachdem die Gleichung (1) auf die Form (32) gebracht ist, unter den Wurzeln dieser Gleichung eine von denen bestimmt werden, deren Modulus kleiner ist als die Zahl 4,455... (Siehe Seite 160 und 169).

Alsdann hat man:

$$(101)\quad f(x) = e^x - x,\ f'(x) = e^x - 1,$$

$$f''(x) = f'''(x) = \ldots = e^x;$$

und wenn man Null für den ersten genäherten Werth der gesuchten Wurzel annimmt, so findet man:

(102) $f(0)=1,\ f'(0)=0,\ f''(0)=1.$

Folglich geben die Formeln (90) für $x=0$:

(103) $R=1,\ R_1=0,\ R_2=1,\ T=T_1=\pi.$

Setzt man dann in der Formel (92) der vorhergehenden Vorlesung $n=2$ und $2m+1=1$ oder $=3$, so folgt daraus nach einander:

(104) $\Delta x=\rho\sqrt{-1},\ \Delta x=-\rho\sqrt{-1}.$

Folglich ist der zweite genäherte Werth der gesuchten Wurzel:

(105) $x+\Delta x=\rho\sqrt{-1}$, oder $x+\Delta x=-\rho\sqrt{-1}$,

indem ρ klein genug ist, daß der Modulus des Ausdruckes:

(106) $\begin{cases} f(x+\Delta x)=\cos\rho-(\rho-\sin\rho)\sqrt{-1}, \\ \text{oder } f(x+\Delta x)=\cos\rho+(\rho-\sin\rho)\sqrt{-1}, \end{cases}$

nämlich:

(107) $(1-2\rho\sin\rho+\rho^2)^{\frac{1}{2}}$,

kleiner wird als der Modulus von $f(x)$, d. h. kleiner als die Einheit. Nun wird aber diese Bedingung erfüllt, wenn man $\rho=$ oder $<\frac{\pi}{2}$ setzt, weil in diesem Falle immer $\sin\rho>\frac{\rho}{2}$ ist. Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir $\rho=\frac{\pi}{2}$ setzen, so reducirt sich der Modulus (107) auf:

(108) $$\left(1-\pi+\frac{\pi^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{2}-1=0,5707\ldots,$$

und die erste der Formeln (105) auf:

(109) $$x+\Delta x=\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}=(1,5707\ldots)\sqrt{-1}.$$

Setzt man nun:

(110) $$x=r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)=\frac{\pi}{2}\sqrt{-1},$$

so findet man:

(111) $$f(x)=e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}=\left(1-\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{-1}$$

$$f'(x)=e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}-1=-1+\sqrt{-1},$$

$$(112)\qquad r=\frac{\pi}{2},\ t=\frac{\pi}{2},$$

$$(113)\quad R=\frac{\pi}{2}-1,\ R_1=\sqrt{2},\ T=-\frac{\pi}{2},\ T_1=\frac{3\pi}{4},$$

und die Formeln (91), (96) geben:

$$(114)\quad \Delta x=\rho(\cos\nu+\sqrt{-1}\sin\nu)=\frac{\pi-2}{4}(1-\sqrt{-1}),$$

$$(115)\quad \rho=\frac{\pi-2}{2\sqrt{2}}=0{,}04036\ldots,\ \nu=-\frac{\pi}{4}=-0{,}7583\ldots,$$

so daß man hat:

$$(116)\quad x+\Delta x=\frac{\pi-2}{4}+\frac{\pi+2}{4}\sqrt{-1}$$
$$=0{,}28539\ldots+(1{,}28539\ldots)\sqrt{-1}.$$

Ueberdies folgt aus der Gleichung (98), wenn man $f''(x)=e^x$ setzt:

$$(117)\quad \Phi''(\rho)+\sqrt{-1}\,X'(\rho)=$$
$$e^{r\cos t+\rho\cos\nu}\,[\cos(r\sin t+\rho\sin\nu+2\nu)+$$
$$\sqrt{-1}\sin(r\sin t+\rho\sin\nu+2\nu)].$$

Mithin gibt die Formel (97):

$$(118)\left\{\begin{array}{l} f(x+\Delta x)= \\ \quad\frac{1}{2}\rho^2 e^{r\cos t}[e^{\theta_1\rho\cos\nu}\cos(r\sin t+\theta_1\rho\sin\nu+2\nu)+ \\ \quad e^{\theta_2\rho\cos\nu}\sin(r\sin t+\theta_2\rho\sin\nu+2\nu)\sqrt{-1}], \end{array}\right.$$

und da nach dieser letzten Formel der Modulus von $f(x+\Delta x)$ für positive Werthe von $\cos\nu$ offenbar kleiner ist als das Product:

$$(119)\qquad \rho^2 e^{r\cos t+\rho\cos\nu},$$

so kann man behaupten, daß dem Werthe von $x+\Delta x$, welcher durch die Gleichung (116) gegeben wird, ein Modulus von $f(x+\Delta x)$ entspricht, der kleiner ist als die Größe:

$$(120)\qquad \rho^2 e^{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\rho\cos\frac{\pi}{4}}=\rho^2 e^{\frac{\rho}{\sqrt{2}}}=0{,}2167\ldots,$$

und folglich kleiner als der Modulus:

$$R=\frac{\pi}{2}-1=0{,}5707\ldots$$

Hiervon kann man sich übrigens auch leicht direct überzeugen; denn setzt man:

$$x+\Delta x=0{,}28539\ldots+(1{,}28539\ldots)\sqrt{-1},$$

so findet man:

$$(121)\quad f(x+\Delta x)= e^{x+\Delta x}-(x+\Delta x)=0{,}0890\ldots\ldots-(0{,}0089\ldots)\sqrt{-1},$$

und folglich:

$$(122)\quad R+\Delta R=[(0{,}0890\ldots)^2+(0{,}0089\ldots)^2]^{\frac{1}{2}}=0{,}0891\ldots$$

Man kann also den imaginären Ausdruck $0{,}2853\ldots+(1{,}2853\ldots)\sqrt{-1}$ für den dritten genäherten Werth der zu bestimmenden Wurzel nehmen. Wenn man sich endlich der Gleichung (91) bedient, um aus dem dritten genäherten Werthe einen vierten, dann einen fünften aus dem vierten.... abzuleiten, und diese verschiedenen genäherten Werthe durch x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.. bezeichnet; so erhält man mit Einschluß der schon berechneten:

$$(123)\quad \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=(1{,}5707\ldots)\sqrt{-1} \\ x_3=x_2-\dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}=0{,}2853\ldots+(1{,}2853\ldots)\sqrt{-1} \\ x_4=x_3-\dfrac{f(x_3)}{f'(x_3)}=0{,}3185\ldots+(1{,}3388\ldots)\sqrt{-1} \\ x_5=x_4-\dfrac{f(x_4)}{f'(x_4)}=0{,}3181\ldots+(0{,}3372\ldots)\sqrt{-1} \\ \text{etc}\ldots, \end{cases}$$

während die Moduli der imaginären Ausdrücke:

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ f(x_4),\ f(x_5),\ \text{etc}\ldots$$

die abnehmende Reihe bilden:

$$1,\ 0{,}5707\ldots,\ 0{,}0891\ldots,\ 0{,}0023\ldots,\ 0{,}0000\ldots,\ \text{etc}\ldots;$$

und da die Werthe von x_5, x_6 sich nicht von einander unterscheiden, wenn man die Annäherung nur bis zu den Decimalen der vierten Ordnung treibt; so können wir annehmen, daß

$$(125)\qquad x=0{,}3181\ldots+(1{,}3372\ldots)\sqrt{-1}$$

die gesuchte Wurzel der Gleichung (32) mit einer Genauigkeit, die sich bis auf die vierte Decimale in jedem Gliede erstreckt, ausdrückt. Um übrigens in dieser Beziehung jede Ungewißheit zu beseitigen, braucht man nur auf den Lehrsatz 6 zurückzugehen, und folgendes Verfahren anzuwenden.

Wenn man in der Function $f(x) = e^x - x$,

(38) $$x = p + q\sqrt{-1},$$

und

(126) $$p = 0{,}3181 + \alpha,\quad q = 1{,}3372 + \beta$$

setzt, so findet man:

(127) $$f(x) = f(p + q\sqrt{-1}) =$$
$$(0{,}3181695\ldots + 1{,}3371818\ldots\sqrt{-1})\, e^{\alpha}(\cos\beta + \sqrt{-1}\sin\beta)$$
$$-(0{,}3181 + \alpha + (1{,}3372 + \beta)\sqrt{-1}).$$

Ueberdies wollen wir setzen:

(128) $$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \rho(\cos\nu + \sqrt{-1}\sin\nu),$$

wo ρ den Modulus von $f(x)$ bezeichnet, und es seien θ_1, θ_2 zwei kleinere Zahlen als 1. Setzt man nun in der Formel (12) Vorlesung 8, ρ für x, $e^{\rho\cos\nu}\cos(\rho\sin\nu)$ oder $\rho^{\rho\cos\nu}\sin(\rho\sin\nu)$ für $f(x)$ und θ_1 oder θ_2 für θ; so folgt daraus:

(129) $$\left\{\begin{aligned}
e^{\alpha}\cos\beta &= e^{\rho\cos\nu}\cos(\rho\sin\nu) = \\
&\tfrac{1}{2}\left[e^{\rho(\cos\nu + \sqrt{-1}\sin\nu)} + e^{\rho(\cos\nu - \sqrt{-1}\sin\nu)}\right] \\
&= 1 + \rho\cos\nu + \frac{\rho^2}{2} e^{\theta_1\rho\cos\nu}.\cos(2\nu + \theta_1\rho\sin\nu), \\
e^{\alpha}\sin\beta &= e^{\rho\cos\nu}\sin(\rho\sin\nu) = \\
&\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[e^{\rho(\cos\nu + \sin\nu\sqrt{-1})} - e^{\rho(\cos\nu - \sqrt{-1}\sin\nu)}\right]. \\
&= \rho\sin\nu + \frac{\rho^2}{2} e^{\theta_2\rho\cos\nu}.\sin(2\nu + \theta_2\rho\sin\nu),
\end{aligned}\right.$$

oder was einerlei ist:

(130) $$\left\{\begin{aligned}
e^{\alpha}\cos\beta &= 1 + \alpha + \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\, e^{\theta_1\alpha}\cos(2\nu + \theta_1\beta) \\
e^{\alpha}\sin\beta &= \beta + \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\, e^{\theta_2\alpha}\sin(2\nu + \theta_2\beta).
\end{aligned}\right.$$

Man kann folglich, wenn man der Kürze wegen

(131) $$\left\{\begin{aligned}
0{,}0000695\ldots - 0{,}6818304\ldots\alpha - 1{,}3371818\ldots\beta &= \mathfrak{A} \\
-0{,}0000181\ldots + 1{,}3371818\ldots\alpha - 0{,}6818304\ldots\beta &= \mathfrak{B}.
\end{aligned}\right.$$

(132) $$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\,[0{,}3181695\ldots e^{\theta_1\alpha}\cos(2\nu + \theta_1\beta) \\
&\qquad - 1{,}3371818\ldots e^{\theta_2\alpha}\sin(2\nu + \theta_2\beta)] = \gamma \\
&\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\,[1{,}3371818\ldots e^{\theta_1\alpha}\cos(2\nu + \theta_1\beta) \\
&\qquad + 0{,}3181695\ldots e^{\theta_2\alpha}\sin(2\nu + \theta_2\beta)] = \delta,
\end{aligned}\right.$$

ſetzt, die Formel (127) auf:

$$(133)\qquad f(p+q\sqrt{-1})=\mathfrak{A}+\gamma+(\mathfrak{B}+\delta)\sqrt{-1}$$

reduciren.

Es ſeien nun:

$$R,\ \mathfrak{R},\ \varsigma$$

die Moduli der imaginären Ausdrücke:

$$f(p+q\sqrt{-1}),\ \mathfrak{A}+\mathfrak{B}\sqrt{-1},\ \gamma+\delta\sqrt{-1},$$

ſo daß nicht nur:

$$(134)\quad f(x)=f(p+q\sqrt{-1})=R(\cos T+\sqrt{-1}\sin T),$$

ſondern auch:

$$(135)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}+\mathfrak{B}\sqrt{-1}=\mathfrak{R}(\cos\mathfrak{T}+\sqrt{-1}\sin\mathfrak{T}), \\ \gamma+\delta\sqrt{-1}=\varsigma(\cos\omega+\sqrt{-1}\sin\omega) \end{cases}$$

iſt, wo $\mathfrak{T}$, ω reelle Bogen bezeichnen. Die Gleichung (133) gibt:

$$(136)\quad R\cos T=\mathfrak{R}\cos\mathfrak{T}+\varsigma\cos\omega,\quad R\sin\mathfrak{T}=\mathfrak{R}\sin T+\varsigma\sin\omega,$$

und das Quadrat des Modulus R, welches durch die Formel:

$$(137)\qquad R^2=\mathfrak{R}^2+2\varsigma\mathfrak{R}\cos(\mathfrak{T}-\omega)+\varsigma^2$$

beſtimmt wird, bleibt offenbar zwiſchen den Grenzen:

$$(138)\qquad (\mathfrak{R}-\varsigma)^2,\ (\mathfrak{R}+\varsigma)^2.$$

Mithin liegt der Modulus R ſelbſt zwiſchen den Grenzen:

$$(139)\qquad \mathfrak{R}-\varsigma,\ \mathfrak{R}+\varsigma,$$

wenn $\varsigma<\mathfrak{R}$, und zwiſchen den Grenzen:

$$(140)\qquad \varsigma-\mathfrak{R},\ \varsigma+\mathfrak{R},$$

wenn $\varsigma>\mathfrak{R}$ iſt, woraus offenbar folgt, daß die Differenz:

$$(141)\qquad R-\mathfrak{R}$$

in allen Fällen einen kleinern Zahlenwerth als ς hat. Anderer Seits, wenn man den Größen α, β kleinere poſitive Werthe als 0,0001 beilegt; ſo bleiben die aus den Formeln (132) abgeleiteten Werthe von γ, δ zwiſchen den Grenzen $-0{,}00000002$, $+0{,}00000002$, und folglich bleibt der Modulus:

$$(142)\qquad \varsigma=(\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}$$

kleiner als $(0{,}00000002)\sqrt{2}<0{,}00000003$. Folglich kann der Modulus R alsdann von dem Modulus $\mathfrak{R}$ nur in der achten De-

cimalstelle verschieden sein. Nun verschwindet aber der Modulus:

$$\mathfrak{R}=(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{143}$$

wenn man setzt:

$$\left\{\begin{aligned} &0{,}0000695\ldots-0{,}6818304\ldots\alpha-1{,}3371818\ldots\beta \\ &\qquad=\mathfrak{A}=0, \\ &-0{,}0000181\ldots+1{,}3371818\ldots\alpha-0{,}6818304\ldots\beta \\ &\qquad=\mathfrak{B}=0, \end{aligned}\right. \tag{144}$$

oder was einerlei ist:

$$\alpha=0{,}0000317\ldots,\quad \beta=0{,}0000357\ldots \tag{145}$$

Gibt man aber der Veränderlichen α einen der Werthe:

$$\alpha=0, \tag{146}$$

$$\alpha=0{,}0001, \tag{147}$$

und nimmt β zwischen den Grenzen:

$$\beta=0, \tag{148}$$

$$\beta=0{,}0001, \tag{149}$$

oder gibt man der Veränderlichen β einen der Werthe (148), (149) und nimmt α zwischen den Grenzen (146), (147) an; so ist der Modulus $\mathfrak{R}$, welcher sich auf eine der Formen:

$$\mathfrak{R}=[(0{,}0000695\ldots-1{,}3371818\ldots\beta)^2 + (0{,}0000181\ldots+0{,}6818304\ldots\beta)^2]^{\frac{1}{2}}, \tag{150}$$

$$\mathfrak{R}=[(0{,}0000014\ldots-1{,}3371818\ldots\beta)^2 + (0{,}0001156\ldots-0{,}6818304\ldots\beta)^2]^{\frac{1}{2}}, \tag{151}$$

$$\mathfrak{R}=[(0{,}0000695\ldots-0{,}6818304\ldots\alpha)^2 + (0{,}0000181\ldots-1{,}3371818\ldots\alpha)^2]^{\frac{1}{2}}, \tag{152}$$

$$\mathfrak{R}=[(0{,}0000642\ldots+0{,}6818304\ldots\alpha)^2 + (0{,}0000862\ldots-1{,}3371818\ldots\alpha)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{153}$$

reducirt, offenbar größer, als eine der Größen:

$$0{,}0000181\ldots, \tag{154}$$

$$0{,}0001156\ldots-(0{,}6818304)(0{,}0001)=0{,}0000475\ldots \tag{155}$$

$$0{,}0000695\ldots-(0{,}6818304)(0{,}0001)=0{,}0000014\ldots \tag{156}$$

$$0{,}0000641\ldots \tag{157}$$

Folglich bleibt der Modulus R kleiner als die Zahl 0,00000003,

wenn man

$$(158)\quad \begin{cases} p = 0{,}3181 + 0{,}0000321 = 0{,}3181321\ldots \\ q = 1{,}3372 + 0{,}0000356 = 1{,}3372356\ldots \end{cases}$$

setzt; aber er wird größer als die Zahl 0,0000014...., wenn man die Größe p zwischen den Grenzen:

$$(159)\qquad p_1 = 0{,}3181\,,\ p_2 = 0{,}3181 + 0{,}0001 = 0{,}3182$$

variiren läßt, und q einen der Werthe:

$$(160)\qquad q_1 = 1{,}3372\,,\ q_2 = 1{,}3372 + 0{,}0001 = 1{,}3373$$

beilegt, oder wenn man q zwischen den Grenzen q_1, q_2 variiren läßt, und p einen der Werthe p_1, p_2 gibt. Folglich hat die Gleichung (32) nach Lehrsatz 6, und weil die Zahl 0,0000014 größer ist als die Zahl 0,00000003, eine imaginäre Wurzel:

$$x = p + q\sqrt{-1},$$

in welcher der Werth von p zwischen den Grenzen 1,3181, 0,3182 und der Werth von q zwischen den Grenzen 1,3372, 1,3373 liegt. Die Gleichung (125) gibt also diese Wurzel mit einer Genauigkeit, die sich in jedem Gliede des zweiten Theiles bis auf die fünfte Decimalstelle erstreckt. Die Genauigkeit geht sogar noch weiter; denn die der gesuchten Wurzel entsprechenden Werthe von α, β sind kleiner, als die Zahl 0,0001, und genügen der Gleichung $R = 0$, oder was einerlei ist, den beiden Gleichungen:

$$(161)\qquad \mathfrak{A} + \gamma = 0,\ \mathfrak{B} + \delta = 0.$$

Substituirt man nun in diese letzten Gleichungen für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ ihre aus den Gleichungen (131) gezogenen Werthe, so erhält man:

$$(162)\quad \begin{cases} \alpha = 0{,}0000317 + (0{,}302\ldots)\gamma - (0{,}593\ldots)\delta \\ \beta = 0{,}0000357 + (0{,}593\ldots)\delta + (0{,}302\ldots)\gamma. \end{cases}$$

Weil γ, δ zwischen den Grenzen $-0{,}00000002$, $+0{,}00000002$ liegen, so sind folglich die durch die Gleichungen (145) gegebenen Werthe von α, β bis auf die siebente Decimalstelle genau, und dasselbe gilt von der durch die Gleichung:

$$(163)\qquad x = 0{,}3181317\ldots + (1{,}3372357\ldots)\sqrt{-1}$$

bestimmten Wurzel x.

Wenn man in den obigen Rechnungen für die erste der Gleichungen (105) die zweite substituirte, so erhielte man alsdann statt der Formel (163) folgende:

$$(164)\qquad x = 0{,}3181317\ldots - (1{,}3372357\ldots)\sqrt{-1},$$

welches eine zweite Wurzel der Gleichung (32) ist. Da diese und

die durch die Formel (163) bestimmte Wurzel conjugirte sind; so entsprechen sie einem einzigen, zwischen 0 und 4,455... liegenden Modulus.

Das Vorhergehende ist hinreichend, um zu zeigen, wie man durch successive Approximationen die reellen oder imaginären Wurzeln einer algebraischen oder transscendenten Gleichung so genau bestimmen kann, als man nur immer will, und wie man zugleich die Grenzen der begangenen Fehler berechnen kann. Die obige Auflösungsmethode hat Legendre in der zweiten Ausgabe seiner Theorie der Zahlen gegeben, und er war der Meinung, sie müsse sich auf alle Arten algebraischer, oder transscendenter Gleichungen anwenden lassen. Aber es ist einleuchtend, daß sie nicht mehr anwendbar ist, wenn die Function $f(x)$, die in einem der Lehrsätze 1, 3, 4, 5, 6 ausgesprochenen Bedingungen nicht erfüllt. Dieses kann nicht befremden, wenn man erwägt, daß man $f(x)$ eine solche Form geben kann, daß die Gleichung (1) weder reelle, noch imaginäre endliche Wurzeln gestattet, was z. B. der Fall ist, wenn man setzt:

$$f(x)=e^x,\ f(x)=e^{x\sqrt{-1}},\ f(x)=e^{x^2}.$$

In solchen Fällen kann man der Veränderlichen x wohl noch eine Reihe von Werthen anweisen, die so gewählt sind, daß die correspondirenden Werthe des Modulus von $f(x)$ immer kleiner werden, aber die Moduli der verschiedenen Glieder der Reihe (88) wachsen über jede endliche Grenze hinaus, statt daß sie gegen eine endliche Grenze convergiren sollten. (Man sehe übrigens über die Auflösung der Zahlengleichungen das angeführte Werk von Legendre, und eine Abhandlung von Fourier im Tome VII des Mémoires de l'Academie des Sciences.)

Wir haben schon bemerkt, daß, wenn $f(x)$ eine ganze Function des Grades n bezeichnet, wie die durch die Gleichung (4) ausgedrückte, sich diese Function in so viele Factoren des ersten Grades zerlegen läßt, als die Zahl n Einheiten hat. Wenn ferner die Function $f(x)$ unter reeller Form erscheint, oder wenn die im zweiten Theile der Gleichung (4) vorkommenden Constanten a_0, $a_1 \ldots a_n$ alle reell sind; so hat die Gleichung (1) nur reelle Wurzeln, oder imaginäre conjugirte Wurzeln von der Form:

$$r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t),\quad r(\cos t-\sqrt{-1}\sin t).$$

Alsdann entspricht jeder reellen Wurzel ein reeller Factor des ersten Grades, während daß zwei imaginären conjugirten Wurzeln zwei imaginäre Factoren:

$$x-r\cos t-r\sin t\sqrt{-1},\ x-r\cos t+r\sin t\sqrt{-1}$$

entsprechen, die auch conjugirt sind, und einen reellen Factor des zweiten Grades:

$$(x-r\cos t)^2+r^2\sin^2 t=x^2-2r\cos t+r^2$$

zum Producte geben. Man kann also folgenden Satz aussprechen:

Jede reelle und ganze Function der Veränderlichen x läßt sich in reelle Factoren des ersten oder zweiten Grades zerlegen. (Siehe algebraische Analysis Cap. X). *)

*) Von diesem wichtigen Satze hat Gauß in den Abhandlungen: Demonstratio nova theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores primi vel secundi gradus resolvi posse. Helmst. 1799 und Demonstratio nova altera et tertia theorematis omnem functionem etc. Gottingae 1816 drei von dem obigen ganz verschiedene Beweise gegeben.

Anmerk. d. Uebers.

Funfzehnte Vorlesung.

Entwickelung einer Function von x, welche für $x = a$ unendlich wird, nach den steigenden Potenzen von $x - a$. Zerlegung der rationalen Brüche.

Es sei

$$(1) \qquad x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$$

eine reelle oder imaginäre Veränderliche, r ihr Modulus oder Zahlenwerth, a ein besonderer Werth derselben und $f(x)$ eine Function, die für $x = a$ unendlich wird; so wird der Werth a von x eine Wurzel der Gleichung:

$$(2) \qquad \frac{1}{f(x)} = 0$$

sein, und man sagt, daß diese Gleichung h Wurzeln hat, jede $= a$, wenn das Product:

$$(3) \qquad (x - a)^h f(x),$$

worin h eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, für $x = a$ einen endlichen, von Null verschiedenen Werth bekommt. Um alsdann die Function $f(x)$ unmittelbar nach den steigenden Potenzen von $x - a$ zu entwickeln, kann man sich der Gleichung (40) Vorles. 13, in deren zweitem Theile unendliche Glieder vorkommen, und welcher daher im Allgemeinen unter unbestimmter Form erscheinen wird, nicht mehr bedienen. Aber diese Gleichung kann noch auf die Entwickelung des als Function von x betrachteten Ausdruckes (3) angewandt werden. Bezeichnet man daher durch ρ den Modulus von $x - a$, und durch $\varphi(\rho)$, $\chi(\rho)$ zwei reelle Functionen von dem Modulus ρ, und setzt:

$$(4) \qquad x - a = \rho(\cos\nu + \sqrt{-1}\sin\nu),$$

$$(5) \qquad (x - a)^h f(x) = \mathfrak{F}(x),$$

$$(6) \qquad \mathfrak{F}[a + \rho(\cos\nu + \sqrt{-1}\sin\nu)] = \varphi(\rho) + \chi(\rho)\sqrt{-1};$$

so folgt aus der angeführten Gleichung:

$$(7)\ \mathfrak{F}(x)=\mathfrak{F}(a)+\frac{x-a}{1}\mathfrak{F}'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}\mathfrak{F}''(a)+\ldots$$
$$+\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\mathfrak{F}^{(n-1)}(a)+\frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots n}\frac{\varphi^{(n)}(\theta_1\rho)+\sqrt{-1}\,\chi^{(n)}(\theta_2\rho)}{(\cos\nu+\sqrt{-1}\sin\nu)^n},$$

wo θ_1 und θ_2 zwei kleinere Zahlen als 1 bezeichnen. Dividirt man nun beide Theile der Formel (7) durch $(x-a)^h$, so ergibt sich:

$$(8)\ f(x)=\frac{\mathfrak{F}(a)}{(x-a)^h}+\frac{1}{1}\frac{\mathfrak{F}'(a)}{(x-a)^{h-1}}+\frac{1}{1.2}\frac{\mathfrak{F}''(a)}{(x-a)^{h-2}}+\ldots$$
$$+\frac{1}{1.2\ldots(h-1)}\frac{\mathfrak{F}^{(h-1)}(a)}{(x-a)}+\frac{\mathfrak{F}^{(h)}(a)}{1.2.3\ldots h}$$
$$+\frac{\mathfrak{F}^{(h+1)}(a)}{1.2.3\ldots(h+1)}(x-a)+\ldots+\frac{\mathfrak{F}^{(n-1)}(a)}{1.2.3\ldots(n-1)}(x-a)^{n-h-1}$$
$$+\frac{\varphi^{(n)}(\theta_1\rho)+\sqrt{-1}\,\chi^{(n)}(\theta_2\rho)}{(\cos\nu+\sqrt{-1}\sin\nu)^n}\frac{(x-a)^{n-h}}{1.2.3\ldots n}.$$

Vermittelst dieser letzten Formel kann man $f(x)$ nach den steigenden und ganzen Potenzen von $(x-a)$ entwickeln, und die h ersten Glieder der Entwickelung, deren Summe $\psi(x)$ genannt werden mag, und gleich

$$(9)\ \psi(x)=\frac{\mathfrak{F}(a)}{(x-a)^h}+\frac{1}{1}\frac{\mathfrak{F}'(a)}{(x-a)^{h-1}}+\frac{1}{1.2}\frac{\mathfrak{F}''(a)}{(x-a)^{h-1}}+\ldots$$
$$+\frac{1}{1.2\ldots(h-1)}\frac{\mathfrak{F}^{(h-1)}(a)}{x-a}=(x-a)^{-h}\mathfrak{F}(a)+\frac{(x-a)^{-h+1}}{1}\mathfrak{F}'(a)$$
$$+\frac{(x-a)^{-h+2}}{1.2}\mathfrak{F}''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^{-1}}{1.2.3\ldots(h-1)}\mathfrak{F}^{(h-1)}(a),$$

ist, enthalten bloß negative Potenzen von $(x-a)$. Setzt man in der Gleichung (8) $n=h$, so gibt sie bloß:

$$(10)\ f(x)=\frac{\mathfrak{F}(a)}{(x-a)^h}+\frac{1}{1}\frac{\mathfrak{F}'(a)}{(x-a)^{h-1}}+\frac{1}{1.2}\frac{\mathfrak{F}''(a)}{(x-a)^{h-2}}+\ldots$$
$$+\frac{1}{1.2.3\ldots(h-1)}\frac{\mathfrak{F}^{(h-1)}(a)}{(x-a)}+\frac{1}{1.2.3\ldots u}\frac{\varphi^{(h)}(\theta_1\rho)+\sqrt{-1}\,\chi^{(h)}(\theta_2\rho)}{(\cos\nu+\sqrt{-1}\sin\nu)^h},$$

oder:

$$(11)\ f(x)=\psi(x)+\frac{\varphi^{(h)}(\theta_1\rho)+\sqrt{-1}\,\chi^{(h)}(\theta_2\rho)}{1.2.3\ldots h}(\cos h\nu-\sqrt{-1}\sin h\nu),$$

und folglich, wenn

$$(12)\qquad f(x)-\psi(x)=\varpi(x),$$

oder

$$(13)\qquad f(x)=\psi(x)+\varpi(x)$$

gesetzt wird:

$$(14)\quad \varpi(x)=\frac{\varphi^{(h)}(\theta_1\rho)+\sqrt{-1}\,\chi^{(h)}(\theta_2\rho)}{1.2.3\ldots h}(\cos h\nu-\sqrt{-1}\sin h\nu).$$

Es verdient bemerkt zu werden, daß die durch die Gleichung (14) bestimmte Function $\varpi(x)$ für $x=a$ folgenden Werth bekommt:

$$(15)\qquad \varpi(x)=\frac{\varphi^{(h)}(0)+\sqrt{-1}\,\chi^{(h)}(0)}{1.2.3\ldots h}=\frac{\mathfrak{F}^{(h)}(a)}{1.2.3\ldots h},$$

welches im Allgemeinen ein endlicher sein wird. Dieses ist z. B. der Fall, wenn man

$$(16)\qquad f(x)=\frac{f(x)}{F(x)}$$

setzt, wo $f(x)$, $F(x)$ zwei ganze Functionen von x bezeichnen, d. h. wenn $f(x)$ ein rationaler Bruch wird. Drückt man alsdann die verschiedenen Wurzeln der Gleichung:

$$(17)\qquad F(x)=0$$

durch $a, b, c\ldots$ aus, die Zahl der Wurzeln, welche $=a$ sind, durch h, die der Wurzeln, welche $=b$ sind, durch k, die Zahl der Wurzeln, welche $=c$ sind, durch $l,\ldots$ und durch $\mathfrak{N}$ einen constanten Factor; so erhält man:

$$(18)\qquad F(x)=\mathfrak{N}(x-a)^h(x-b)^k(x-c)^l\ldots,$$

und folglich:

$$(19)\quad \mathfrak{F}(x)=(x-a)^h f(x)=\frac{f(x)}{\mathfrak{N}(x-b)^k(x-c)^l\ldots}=\frac{1}{\mathfrak{N}}(x-b)^{-k}(x-c)^{-l}\ldots f(x).$$

Differenzirt man nun den zweiten Theil der Gleichung (19) h mal nach x, so erhält man offenbar einen Werth von $\mathfrak{F}^{(h)}(x)$, welcher für $x=a$ nicht unendlich wird. Wenn man anderer Seits der Kürze wegen

$$(20)\quad \mathfrak{F}(a)=A,\ \frac{\mathfrak{F}'(a)}{1}=A_1,\ \frac{\mathfrak{F}''(a)}{1.2}=A_2,\ldots\frac{\mathfrak{F}^{(h-1)}(a)}{1.2\ldots.(h-1)}=A_{h-1},$$

$$\psi(x)=U$$

setzt, so geben die Formeln (9) und (13):

$$(21)\quad U=\frac{A}{(x-a)^h}+\frac{A_1}{(x-a)^{h-1}}+\frac{A_2}{(x-a)^{h-2}}+\ldots+\frac{A_{h-1}}{(x-a)},$$

$$(22)\qquad \frac{f(x)}{F(x)}=U+\varpi(x).$$

Folglich kann der rationale Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$, wenn a eine Wurzel der Gleichung (17) und h die Anzahl der Wurzeln, welche $=a$ sind, bezeichnet, in zwei Theile zerlegt werden, wovon der eine, durch die Formel (21) bestimmte U die Summe mehrerer Brüche ist, welche constante Zähler und die niedrigern Potenzen als die hte von $(x-a)$ zu ihren Nennern haben, während der andere Theil:

$$(23)\qquad \varpi(x)=\frac{f(x)}{F(x)}-U,$$

für jeden endlichen Werth der Veränderlichen x einen endlichen Werth behält.

Es sei nun in dem Bruche (16) m der Grad des Zählers $f(x)$ und n der des Nenners $F(x)$. Ferner seien V, W... ähnliche Functionen von x, wie U, nämlich die, in welche sich die durch die Gleichungen (5) und (9) bestimmte Function $\psi(x)$ verwandelt, wenn man für die Wurzel a eine der Wurzeln b, c... und für die ganze Zahl h eine der Zahlen k, l... substituirt. Die Functionen U, V, W..., welche durch Gleichungen von der Form:

$$(24)\quad \left\{\begin{array}{l} U=\frac{A}{(x-a)^h}+\frac{A_1}{(x-a)^{h-1}}+\ldots.+\frac{A_{h-1}}{(x-a)}, \\ V=\frac{B}{(x-b)^k}+\frac{B_1}{(x-b)^{k-1}}+\ldots.+\frac{B_{k-1}}{(x-b)}, \\ W=\frac{C}{(x-c)^l}+\frac{C_1}{(x-c)^{l-1}}+\ldots.+\frac{C_{l-1}}{(x-c)}, \\ \text{etc}\ldots \end{array}\right.$$

bestimmt werden, können nur dann unendlich werden, wenn in der Function U, $x=a$, in der Function V, $x=b$, in der Function W, $x=c$,.... gesetzt wird; und da die Differenzen:

$$(25)\qquad \frac{f(x)}{F(x)}-U,\ \frac{f(x)}{F(x)}-V,\ \frac{f(x)}{F(x)}-W\ldots.$$

im Gegentheil endliche Werthe bekommen, die erste für $x=a$, die zweite für $x=b$, die dritte für $x=c$..., so ist klar, daß, wenn man

(26) $$\frac{f(x)}{F(x)} - U - V - W - \ldots = Q$$

setzt, die Function Q für keinen endlichen Werth von x unendlich wird. Reducirt man ferner die in dem zweiten Theile der Gleichungen (24) enthaltenen Brüche auf denselben Nenner, so kann man die Summe $U + V + W + \ldots$ leicht in einen neuen Bruch verwandeln, welcher das Product:

(27) $$(x-a)^h (x-b)^k (x-c)^l \ldots.$$

zum Nenner hat, und multiplicirt man die beiden Glieder dieses neuen Bruches durch die Constante $\mathfrak{N}$, so findet man:

(28) $$U + V + W + \ldots = \frac{R}{F(x)},$$

wo R eine ganze Function eines niedrigern Grades als n von x ist. Hiernach erscheint die durch die Function (26) bestimmte Function Q unter der rationalen Form:

(29) $$Q = \frac{f(x) - R}{F(x)},$$

und weil sie für alle endlichen Werthe von x endlich bleiben muß; so muß sie sich nothwendig auf eine ganze Function dieser Veränderlichen reduciren. Da endlich aus der Gleichung (29) folgt:

(30) $$f(x) = Q\,F(x) + R,$$

so müssen die beiden ganzen Functionen Q, R, wovon die zweite von einem niedrigern Grade als F(x) ist, offenbar den Quotienten und Rest der Division von f(x) durch F(x) ausdrücken. Folglich ist der rationale Bruch, welcher diesen Rest zum Zähler und F(x) zum Nenner hat, nach der Formel (28) der Summe der in den zweiten Theilen der Gleichungen (24) enthaltenen Brüche gleich.

In dem Falle, wo der Grad m von f(x) niedriger ist als der Grad n von F(x), verschwindet der Quotient Q, und man hat folglich:

$$f(x) = R.$$

Alsdann folgt aus den Gleichungen (24) und (28):

(31) $$\begin{aligned}\frac{f(x)}{F(x)} = {} & \frac{A}{(x-a)^h} + \frac{A_1}{(x-a)^{h-1}} + \ldots + \frac{A_{h-1}}{(x-c)},\\ & + \frac{B}{(x-b)^k} + \frac{B_1}{(x-b)^{k-1}} + \ldots + \frac{B_{k-1}}{(x-b)},\\ & + \frac{C}{(x-c)^l} + \frac{C_1}{(x-c)^{l-1}} + \ldots + \frac{B_{l-1}}{(x-c)},\\ & + \text{etc} \ldots\end{aligned}$$

Die Formel (31) gibt offenbar ein Mittel an die Hand, den rationalen Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ in einfache Brüche zu zerlegen, d. h. in Brüche, welche constante Zähler haben, und deren Nenner die ganzen Potenzen der einfachen Factoren $x-a$, $x-b$, $x-c$,... sind; und man erhält folgenden Lehrsatz:

Lehrsatz 1. Es sei

$$(16) \qquad \frac{f(x)}{F(x)}$$

ein rationaler Bruch, in welchem der Grad des Nenners höher ist, als der des Zählers, und es seien a, b, c... die reellen oder imaginären Wurzeln der Gleichung:

$$(17) \qquad F(x)=0;$$

so braucht man, um den Bruch (16) in einfache Brüche zu zerlegen, denselben nur 1) nach den steigenden Potenzen von $x-a$, 2) nach den steigenden Potenzen von $x-b$, 3) nach den steigenden Potenzen von $x-c$, etc... zu entwickeln, und dann die Summe der Glieder zu bilden, welche in den verschiedenen Entwickelungen unendlich werden, wenn man $x=a$, $x=b$, $x=c$, etc setzt.

Wenn der Quotient Q nicht verschwindet, so ergibt sich aus den Formeln (24), (26) folgende:

$$(32) \quad \frac{f(x)}{F(x)}=Q+\frac{A}{(k-a)^h}+\frac{A_1}{(x-a)^{h-1}}+\ldots+\frac{A_{h-1}}{(x-a)},$$
$$+\frac{B}{(x-b)^k}+\frac{B_1}{(x-b)^{k-1}}+\ldots+\frac{B_{k-1}}{(x-b)},$$
$$+\frac{C}{(x-c)^l}+\frac{C_1}{(x-c)^{l-1}}+\ldots+\frac{C_{l-1}}{(x-c)}$$
$$+\text{etc}\ldots,$$

welche auch zur Zerlegung des Bruches (16) in einfache Brüche dient, und man muß für den Lehrsatz 1 folgenden substituiren:

Lehrsatz 2. Es sei

$$(16) \qquad \frac{f(x)}{F(x)}$$

ein rationaler Bruch, in welchem der Grad des Zählers gleich oder höher als der des Nenners wird, und es seien a, b c... die reellen oder imaginären Wurzeln der Gleichung (17); so genügt es, um den Bruch (16) in einfache Brüche zu zerlegen, denselben 1) nach den steigenden Potenzen von $x-a$, 2) nach den stei-

genden Potenzen von $x-b$, 3) nach den steigenden Potenzen von $x-c$, etc... zu entwickeln, dann zu dem Quotienten der Division von $f(x)$ durch $F(x)$ die Summe der Glieder zu addiren, welche in den verschiedenen Entwickelungen für $x=a$, für $x=b$, für $x=c$,.... unendlich werden.

In dem besondern Falle, wo die Wurzeln der Gleichung (17) alle ungleich sind, erhält man:

$$h=k=l=\ldots=1, \tag{33}$$

$$F(x)=\mathfrak{R}(x-a)(x-b)(x-c)\ldots., \tag{34}$$

und die Formeln (31), (32) reduciren sich auf die beiden folgenden:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\text{etc}\ldots \tag{35}$$

$$\frac{f(x)}{F(x)}=Q+\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\text{etc}\ldots \tag{36}$$

In demselben Falle folgt aus der Gleichung (5):

$$\mathfrak{F}(x)=(x-a)f(x)=\frac{(x-a)f(x)}{F(x)}, \tag{37}$$

und um also den Coefficienten A oder $\mathfrak{F}(a)$ zu bestimmen, genügt es, $x-a$ in dem Bruche:

$$\frac{(x-a)f(x)}{F(x)},$$

verschwinden zu lassen. Da aber alsdann dieser Bruch unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint, so muß, nach Formel 6 Vorles. 5, das Verhältniß:

$$\frac{(x-a)f'(x)+f(x)}{F'(x)}$$

dafür gesetzt werden, welches selbst auf:

$$\frac{f(x)}{F'(x)} \tag{38}$$

reducirt werden kann.

Man hat folglich:

$$A=\frac{f(a)}{F'(a)}, \tag{39}$$

und ebenso wird man finden:

$$B=\frac{f(b)}{F'(b)},\ C=\frac{f(c)}{F'(c)},\ \text{etc}\ldots \tag{40}$$

Endlich geben die Formeln (39) und (40), wenn man die Gleichung (34) berücksichtigt:

$$(41)\quad A = \frac{1}{\mathfrak{N}} \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)\ldots},\quad B = \frac{1}{\mathfrak{N}} \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)\ldots},$$

$$C = \frac{1}{\mathfrak{N}} \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)\ldots}\ \text{etc}\ldots$$

Noch ist zu bemerken, daß sich die erste der Gleichungen (41) direct aus den Formeln (34) und (37), oder aus der Formel:

$$\mathfrak{F}(x) = \frac{f(x)}{\mathfrak{N}(x-b)(x-c)\ldots}$$

herleiten läßt.

Wenn der Grad m von f(x) kleiner ist, als die Anzahl der Größen a, b, c..., so folgt aus den Formeln (35), (41):

$$(42)\ \frac{f(x)}{F_1(x)} = \frac{1}{\mathfrak{N}} \left\{ \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)\ldots} \cdot \frac{1}{x-a} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)\ldots} \cdot \frac{1}{x-b} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)\ldots} \cdot \frac{1}{x-c} + \ldots \right\},$$

und hieraus folgt mit Berücksichtigung der Formel (34):

$$(43)\ f(x) = \frac{(x-b)(x-c)\ldots}{(a-b)(a-c)\ldots} f(a) + \frac{(x-a)(x-c)\ldots}{(b-a)(b-c)\ldots} f(b) + \frac{(x-a)(x-b)\ldots}{(c-a)(c-b)\ldots} f(c) + \text{etc}\ldots$$

Die Gleichung (43) ist nichts anders, als die Lagrangesche Interpolations-Formel, vermittelst welcher man eine ganze Function von x bestimmt, wenn man so viele besondere Werthe dieser Function kennt, als die ganze Zahl n Einheiten hat, die unmittelbar größer ist als ihr Grad.

Wenn die Functionen f(x), F(x) unter reeller Form erscheinen, und die beiden Wurzeln a, b imaginär und conjugirt, d. h. von der Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ sind; so findet man, wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zwei reelle Größen bezeichnen, die der Gleichung:

$$(44)\qquad \mathfrak{A} - \mathfrak{B}\sqrt{-1} = \frac{f(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha+\beta\sqrt{-1})}$$

Genüge leisten, daß die diesen Wurzeln entsprechenden einfachen Brüche in dem zweiten Theile der Formel (35) oder (36) respective:

$$(45)\qquad \frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}},\ \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}$$

sind.

Addirt man diese beiden Brüche, so erhält man folgenden:

$$(46) \qquad \frac{2\mathfrak{A}(x-\alpha)+2\mathfrak{B}\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$

welcher eine reelle und lineäre Function von x zum Zähler, und einen reellen Factor des zweiten Grades von dem Polynome $F(x)$ zum Nenner hat.

Uebrigens könnte man verschiedene Methoden zur Zerlegung des rationalen Bruches $\frac{f(x)}{F(x)}$ in einfache Brüche, d. h. in solche, wie im zweiten Theile der Gleichung (32) vorkommen, angeben; aber diese verschiedenen Methoden würden für die Coefficienten A, A_1, $A_2 \ldots A_{h-1}$, B, $B_1 \ldots B_{k-1}$, C, $C_1 \ldots C_{l-1}$; .... nothwendig dieselben Werthe geben. Um dieses zu beweisen, wollen wir die beiden Theile der Gleichung (32) durch $F(x)$ multipliciren; so ergibt sich, wenn man der Kürze wegen

$$(47) \quad QF(x)+B\frac{F(x)}{(x-b)^k}+\ldots+B_{k-1}\frac{F(x)}{(x-b)}+C\frac{F(x)}{(x-c)^l}+\ldots$$
$$+C_{l-1}\frac{F(x)}{(x-c)} \text{ etc.} \ldots=(x-a)^h\pi(x)$$

setzt:

$$(48) \qquad f(x)=A\frac{F(x)}{(x-a)^h}+A_1\frac{F(x)}{(x-a)^{h-1}}+\ldots$$
$$+A_{h-1}\frac{F(x)}{(x-a)}+(x-a)^h\pi(x).$$

Da überdies der erste Theil der Gleichung (47) eine ganze Function von x ist, die ebensowohl als $F(x)$ durch $(x-a)^h$ theilbar ist; so drückt $\pi(x)$ auch eine ganze Function aus. Setzt man folglich in der Formel (48) $x=a+z$, und vergleicht dann die constanten Glieder, und die Coefficienten der gleich hohen Potenzen der Veränderlichen z in den nach den steigenden Potenzen dieser Veränderlichen entwickelten beiden Theilen; so findet man successive:

$$(49) \quad f(a+z)=$$
$$\left(\frac{A}{z^h}+\frac{A_1}{z^{h-1}}+\ldots+\frac{A_{h-1}}{z}\right)F(a+z)+z^h\pi(a+z),$$

oder, was einerlei ist:

$$(50) \quad f(a)+\frac{f'(a)}{1}z+\frac{f''(a)}{1.2}z^2+\ldots+\frac{f^{(m)}(a)}{1.2.3\ldots m}z^m=$$
$$z^h\pi(a+z)+(A+A_1z+A_2z^2+\ldots+A_{h-1}z^{h-1})$$
$$\times\left(\frac{F^{(h)}(a)}{1.2.3\ldots h}+\frac{F^{(h+1)}(a)}{1.2.3\ldots h+1}z+\ldots\ldots+\frac{F^{(n)}(a)}{1.2.3\ldots n}z^{n-h}\right),$$

und:

$$(51)\qquad f(a) = A\frac{F^{(h)}(a)}{1.2.3\ldots h},\ f'(a) = A_1\frac{F^{(h)}(a)}{1.2.3\ldots h} + A\frac{F^{(h+1)}(a)}{1.2.3\ldots h(h+1)},\ f''(a) = etc\ldots$$

Aus den Formeln (51) ergibt sich offenbar ein einziges System von Werthen für die Constanten A, A_1, $A_2 \ldots A_{h-1}$, nämlich:

$$(52)\qquad A = \frac{1.2.3\ldots h f(a)}{F^{(h)}(a)},$$

$$A_1 = \frac{1.2\ldots(h+1)f'(a) - AF^{(h+1)}(a)}{(h+1)F^{(h)}(a)},\ldots.$$

Auf dieselbe Weise würde man die Werthe von B, $B_1 \ldots B_{k-1}$, C, $C_1 \ldots C_{l-1}$ erhalten. Es verdient bemerkt zu werden, daß die erste der Formeln (52) für die Constante A einen Werth gibt, der dem gleich ist, welchen der Bruch $\frac{(x-a)^h f(x)}{F(x)}$ für $x = a$ bekommt.

Dieser Werth reducirt sich für $h = 1$ auf den durch die Formel (39) ausgedrückten.

Um von den obigen Sätzen eine Anwendung zu zeigen, sei der rationale Bruch:

$$(53)\qquad f(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)}$$

in einfache Brüche zu zerlegen.

Nach Lehrsatz 1 braucht man diesen Bruch nur zu entwickeln 1) nach den steigenden Potenzen von $(x-1)$, 2) nach den steigenden Potenzen von $(x+1)$, und dann die Summe der Glieder zu bilden, welche für $x = 1$ oder $x = -1$ unendlich werden. Bezeichnet man nun 1) durch $\varpi(x)$ eine Function, welche für $x = 1$ einen endlichen Werth behält, so ergibt sich:

$$(x-1)^2 f(x) = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2+(x-1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + (x-1)^2\varpi(x),$$

und folglich:

$$(54)\qquad f(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)} + \varpi(x);$$

2) wenn man durch $\varpi_1(x)$ eine Function bezeichnet, die für $x = -1$ einen endlichen Werth behält:

$$(x+1)f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{[2-(x+1)]^2} = \frac{1}{4} + (x+1)\varpi_1(x),$$

und folglich:

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} + \varpi_1(x).$$

In den beiden Entwickelungen des Ausdruckes (53) sind die drei einfachen Brüche:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)^2}, \; + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1}, \; \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1}$$

die Glieder, welche für $x=1$ oder $x=-1$ allein unendlich werden, und man hat folglich nach Lehrsatz 1:

$$(56) \quad \frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1}.$$

Ebenso würde man finden:

$$(57) \quad \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1},$$

$$\text{und} \quad \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}.$$

Ferner sei der rationale Bruch:

$$(58) \quad \frac{x^m}{x^n - 1},$$

wo m, n zwei ganze Zahlen bezeichnen, und $m < n$ ist, in einfache Brüche zu zerlegen. Mit andern Worten, es sei:

$$f(x) = x^m, \; F(x) = x^n - 1,$$

so reducirt sich die Gleichung (17) auf die binomische Gleichung:

$$(59) \quad x^n = 1,$$

deren ungleiche Wurzeln die Form haben:

$$(60) \quad x = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}$$

wobei k eine ganze Zahl ist, die $= \frac{1}{2}n$ oder $< \frac{1}{2}n$ ist.

Setzt man nun für x irgend eine dieser Wurzeln, so findet sich:

$$(61) \quad \frac{f(x)}{F'(x)} = \frac{x^m}{n x^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{m+1}$$

$$= \frac{1}{n}\left(\cos\frac{2k(m+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k(m+1)\pi}{n}\right).$$

(8) $f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z\ldots) - f(x, y, z\ldots) =$
$\Delta x\,\varphi(x+\theta_1\Delta x, y, z\ldots) + \Delta y\,\chi(x+\Delta x, y+\theta_2\Delta y, z\ldots)$
$+\Delta z\,\psi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\theta_3\Delta z,\ldots)$.

Dividirt man dann die beiden Theile der Gleichung (8) durch α, läßt α gegen die Grenze Null convergiren, und berücksichtigt die Gleichungen (5), (6), (7); so findet man:

$$(9)\ du = \varphi(x, y, z\ldots)dx + \chi(x, y, z\ldots)dy + \psi(x, y, z\ldots)dz + \text{etc}.$$

Vermöge der Gleichung (9) ist das Differenzial der Function u vollkommen bestimmt, sobald man die Werthe der Größen dx, dy, dz,... bestimmt hat; aber diese letzten Größen, welche die Differenziale der unabhängig veränderlichen Größen ausdrücken, bleiben völlig willkührlich, und man kann sie beliebigen endlichen Constanten h, k, l,... gleichsetzen.

Der vorhergehende Beweis der Formel (9) setzt voraus, daß die Veränderlichen $x, y, z\ldots$, die Function u, ihre Incremente und Differenziale reell sind. Allein es ist leicht, diesen Beweis so zu modificiren, daß er sich auch auf den Fall anwenden läßt, wo die Function u, die Veränderlichen $x, y, z,\ldots$, die Incremente Δx, Δy, Δz,... und die Differenziale dx, dy, dz,... imaginär werden. Denn wenn Δx, Δy, Δz,... unendlich klein sind, so folgt aus der Formel (51) der Vorlesung 13:

$$f(x+\Delta x, y, z\ldots) - f(x, y, z\ldots) = \Delta x[\varphi(x, y, z\ldots) + I],$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z\ldots) - f(x+\Delta x, y, z\ldots) = \Delta y[\chi(x+\Delta x, y, z\ldots) + J],$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z\ldots) - f(x+\Delta x, y+\Delta y, z\ldots) = \Delta z[\psi(x+\Delta x, y+\Delta y, z\ldots) + K],$$

etc...,

wo I, J, K mit Δx, Δy, Δz,... verschwinden müssen. Man hat folglich:

$$(10)\ f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z,\ldots) - f(x, y, z\ldots) = [\varphi(x, y, z\ldots) + I]\Delta x + [\chi(x+\Delta x, y, z\ldots) + J]\Delta y + [\psi(x+\Delta x, y+\Delta y, z\ldots) + K]\Delta z + \text{etc}\ldots$$

Nun braucht man aber, um die Formel (9) wieder zu erhalten, die beiden Theile der Gleichung (10) nur durch α zu dividiren, und dann α gegen die Grenze Null convergiren zu lassen.

Die Anwendung der Formel (9) auf besondere Fälle giebt:

$$d(x+y+z+\ldots) = dx+dy+dz+\ldots,\quad d(x-y) = dx-dy,$$
$$d(ax+by+cz+\ldots) = a\,dx+b\,dy+c\,dz+\ldots,$$

$$d(x^a . y^b . z^c \ldots) = x^a . y^b . z^c \ldots \left(a\frac{dx}{x} + b\frac{dy}{y} + c\frac{dz}{z} + \ldots\right),$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2},$$

$$d . x^y = y x^{y-1} dx + x^y\, l(x)\, dy, \text{ etc} \ldots$$

$$d(x + y\sqrt{-1}) = dx + dy\sqrt{-1},$$

$$d . e^{x+y\sqrt{-1}} = e^{x+y\sqrt{-1}}(dx + dy\sqrt{-1}), \text{ etc} \ldots$$

Es ist bemerkenswerth, daß in dem durch die Gleichung (9) gegebenen Werthe von du das Glied $\varphi(x, y, z \ldots) dx$ genau das Differenzial ist, welches man für die Function $u = f(x, y, z, \ldots)$ erhielte, wenn in dieser Function x allein als veränderlich, und $y, z \ldots$ als constant betrachtet würden. Aus diesem Grunde heißt das erwähnte Glied das **partielle Differenzial** der Function u nach x. Ebenso sind

$$\chi(x, y, z \ldots) dy, \; \psi(x, y, z \ldots) dz, \text{ etc} \ldots,$$

die partiellen Differenziale von u nach y, nach $z, \ldots$ Wenn man diese partiellen Differenziale dadurch bezeichnet, daß man unten an den Buchstaben d die Veränderliche setzt, auf welche sie sich beziehen, also durch:

$$d_x u, \; d_y u, \; d_z u, \text{ etc} \ldots,$$

so hat man:

$$(11) \quad \varphi(x, y, z \ldots) = \frac{d_x u}{dx}, \; \chi(x, y, z \ldots) = \frac{d_y u}{dy},$$

$$\psi(x, y, z \ldots) = \frac{d_z u}{dz}, \text{ etc} \ldots,$$

und die Gleichung (9) kann auf die beiden Formen gebracht werden:

$$(12) \qquad du = d_x u + d_y u + d_z u + \text{etc} \ldots$$

$$(13) \qquad du = \frac{d_x u}{dx} dx + \frac{d_y u}{dy} dy + \frac{d_z u}{dz} dz + \text{etc} \ldots$$

Aus der Formel (12) folgt, daß die partiellen Differenziale $d_x u$, $d_y u$, $d_z u$, etc. … die verschiedenen Theile des Totaldifferenzials du sind, welches man auch bloß das Differenzial der Function u nennen kann.

Der Kürze wegen läßt man gewöhnlich in den Formeln (11) die unten an das Zeichen d gesetzten Buchstaben weg, und drückt die nach $x, y, z \ldots$ genommenen partiellen derivirten Functionen

bloß durch die Bezeichnungen:

$$(14)\qquad \frac{du}{dx},\ \frac{du}{dy},\ \frac{du}{dz},\ \text{etc}\ldots$$

aus.

Alsdann ist $\frac{du}{dx}$ nicht der Quotient von du dividirt durch dx, und um das partielle Differenzial von u nach x auszudrücken, muß man sich der Bezeichnung:

$$\frac{du}{dx}.dx$$

bedienen, welche keine Reduction gestattet, wofern man nicht den Buchstaben x wieder unten an das Zeichen d setzt. Hiernach verwandelt sich die Formel (13) in:

$$(15)\qquad du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \text{etc}\ldots$$

Da aber in dieser letzten Formel die Differenziale dx, dy, dz... nicht gegen einander weggestrichen werden dürfen, so vertritt sie die Stelle der Formel (12).

Zum Schlusse dieser Vorlesung wollen wir noch ein sehr einfaches Mittel angeben, die Berechnung der Totaldifferenziale auf die der abgeleiteten Functionen zurückzuführen. Wenn man $\Delta x = \alpha dx$ setzt, wo α eine unendlich kleine Größe bezeichnet, so wird das Totaldifferenzial du durch die Formel (7) bestimmt, wenn die sich der Grenze Null nähernden Incremente Δx, Δy, Δz... den Differenzialen dx, dy, dz... beinahe oder streng proportional werden. Mithin ist die Formel (7) richtig, wenn man setzt:

$$(16)\qquad \Delta x = \alpha dx,\ \Delta y = \alpha dy,\ \Delta z = \alpha dz,\ \text{etc}\ldots,$$

so daß:

$$(17)\ du = \lim \frac{f(x+\alpha dx,\ y+\alpha dy,\ z+\alpha dz,\ldots) - f(x, y, z\ldots)}{\alpha}.$$

Betrachtet man anderer Seits α in dem Ausdrucke $f(x+\alpha dx, y+\alpha dy, z+\alpha dz\ldots)$ allein als veränderlich, und setzt folglich:

$$(18)\qquad f(x+\alpha dx,\ y+\alpha dy,\ z+\alpha dz,\ldots) = F(\alpha),$$

so hat man nicht nur:

$$(19)\qquad u = F(0),$$

sondern auch $\Delta u = F(\alpha) - F(0)$, und folglich:

$$(20)\qquad du = \lim \frac{F(\alpha) - F(0)}{\alpha} = F'(0).$$

Um also das Totaldifferenzial du zu bilden, braucht man nur den besondern Werth zu berechnen, welchen die abgeleitete Function $F'(\alpha)$ für $\alpha = 0$ bekommt.

Siebzehnte Vorlesung.

Gebrauch der partiellen abgeleiteten Functionen bei der Differenzirung der zusammengesetzten Functionen. Differenziale unentwickelter Functionen. Lehrsatz von den homogenen Functionen.

Es sei

$$s = F(u, v, w...)$$

eine beliebige Function von den Veränderlichen u, v, w..., welche selbst wieder als Functionen der unabhängig veränderlichen Größen x, y, z... angesehen werden; so wird s eine zusammengesetzte Function dieser letzten Veränderlichen sein; und wenn man die willkührlichen, gleichzeitigen Incremente von x, y, z... durch Δx, Δy, Δz bezeichnet, so werden die correspondirenden Incremente Δu, Δv, Δw,... Δs der Functionen u, v, w,... s durch die Gleichung:

$$(1)\ \Delta s = F(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w, ...) - F(u, v, w...)$$

mit einander verbunden sein.

Ueberdies seien:

$$\Phi(u, v, w...), X(u, v, w...), \Psi(u, v, w...)$$

die partiellen derivirten Functionen von F(u, v, w...) nach u, v, w,... Da die Gleichung (8) der vorhergehenden Vorlesung für jeden beliebigen Werth der Veränderlichen x, y, z... und ihrer Incremente Δx, Δy, Δz,... gültig ist, so folgt daraus, wenn man u, v, w,... für x, y, z,... und die Function F für *f* setzt:

$$(2)\ F(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w, ...) - F(u, v, w, ...)$$
$$= \Delta u\,\Phi(u+\theta_1 \Delta u, v, w...) + \Delta v\, X(u+\Delta u, v+\theta_2 \Delta v, w...)$$
$$+ \Delta w\,\Psi(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\theta_3 \Delta w, ...) + ...$$

In dieser Gleichung bezeichnen θ_1, θ_2, θ_3,... wieder unbekannte, aber kleinere Zahlen als die Einheit.

Setzt man nun

$$(3)\qquad \Delta x = \alpha dx,\ \Delta y = \alpha dy,\ \Delta z = \alpha dz,\ \text{etc.}\ldots;$$

wo α eine unendlich kleine Größe bezeichnet; so hat man nach der Formel (17) der vorigen Vorlesung:

$$(4)\qquad du = \lim \frac{\Delta u}{\alpha},\quad dv = \lim \frac{\Delta v}{\alpha},$$

$$dw = \lim \frac{\Delta w}{\alpha},\ldots\ ds = \lim \frac{\Delta s}{\alpha}.$$

Dividirt man dann die beiden Theile der Gleichung (2) durch α und geht zu den Grenzen über, so erhält man:

$$(5)\quad ds = \Phi(u, v, w, \ldots)du + X(u, v, w, \ldots)dv$$
$$+ \Psi(u, v, w, \ldots)dw + \ldots$$

Der durch die Gleichung (5) gegebene Werth von ds ist dem ähnlich, welchen die Gleichung (9) der vorhergehenden Vorlesung für du gab. Der Hauptunterschied besteht darin, daß die in dem Werthe von du vorkommenden Differenziale dx, dy, dz, ... willkührliche Constanten sind, während die Differenziale du, dv, dw, ... neue, auf eine gewisse Weise mit den willkührlichen Constanten dx, dy, dz, ... verbundene Functionen der unabhängigen Veränderlichen x, y, z, ... sind.

Der eben gegebene Beweis der Formel (5) setzt voraus, daß die Functionen u, v, w, ... nebst ihren Incrementen und Differenzialen reell sind. Wenn diese Functionen, Incremente und Differenziale imaginär würden, so brauchte man, um die Formel (5) abzuleiten, nur auf die Gleichung (10) der vorigen Vorlesung zurückzugehen. Denn da diese Gleichung für alle endlichen, reellen oder imaginären Werthe der Veränderlichen x, y, z, ... und für alle unendlich kleinen Werthe der Incremente Δx, Δy, Δz, ... gilt; so folgt daraus, wenn man u, v, w, ... für x, y, z, ... und die Function F für f setzt.

$$(6)\quad F(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w, \ldots) - F(u, v, w, \ldots)$$
$$= [\Phi(u, v, w, \ldots) + I]\Delta u + [X(u, v, w, \ldots) + J]\Delta v$$
$$+ [\Psi(u + \Delta u, v + \Delta v, w, \ldots) + K]\Delta w + \text{etc.}\ldots$$

In der Formel (6) bezeichnen I, J, K, ... wieder Größen, welche sich mit Δx, Δy, Δz, ... gleichzeitig der Null unendlich nähern. Gibt man ferner den Incrementen Δx, Δy, Δz, ... die durch die Gleichungen (3) bestimmten Werthe; so genügt es offenbar, um die Formel (5) wieder zu erhalten, die beiden Theile der Gleichung (6) durch α zu dividiren, und zu den Grenzen überzugehen.

Siebzehnte Vorlesung.

Gebrauch der partiellen abgeleiteten Functionen bei der Differenzirung der zusammengesetzten Functionen. Differenziale unentwickelter Functionen. Lehrsatz von den homogenen Functionen.

Es sei

$$s = F(u, v, w \ldots)$$

eine beliebige Function von den Veränderlichen $u, v, w \ldots$, welche selbst wieder als Functionen der unabhängig veränderlichen Größen $x, y, z \ldots$ angesehen werden; so wird s eine zusammengesetzte Function dieser letzten Veränderlichen sein; und wenn man die willkührlichen, gleichzeitigen Incremente von $x, y, z \ldots$ durch Δx, Δy, Δz bezeichnet, so werden die correspondirenden Incremente $\Delta u, \Delta v, \Delta w, \ldots \Delta s$ der Functionen $u, v, w, \ldots s$ durch die Gleichung:

$$(1)\quad \Delta s = F(u + \Delta u,\ v + \Delta v,\ w + \Delta w, \ldots) - F(u, v, w \ldots)$$

mit einander verbunden sein.

Ueberdies seien:

$$\Phi(u, v, w \ldots),\ X(u, v, w \ldots),\ \Psi(u, v, w \ldots)$$

die partiellen derivirten Functionen von $F(u, v, w \ldots)$ nach $u, v, w, \ldots$ Da die Gleichung (8) der vorhergehenden Vorlesung für jeden beliebigen Werth der Veränderlichen $x, y, z \ldots$ und ihrer Incremente $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ gültig ist, so folgt daraus, wenn man $u, v, w, \ldots$ für $x, y, z, \ldots$ und die Function F für f setzt:

$$(2)\quad F(u + \Delta u,\ v + \Delta v,\ w + \Delta w, \ldots) - F(u, v, w, \ldots)$$
$$= \Delta u\, \Phi(u + \theta_1 \Delta u, v, w \ldots) + \Delta v\, X(u + \Delta u, v + \theta_2 \Delta v, w \ldots)$$
$$+ \Delta w\, \Psi(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \theta_3 \Delta w, \ldots) + \ldots$$

In dieser Gleichung bezeichnen $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$ wieder unbekannte, aber kleinere Zahlen als die Einheit.

Setzt man nun

$$(3)\qquad \Delta x = \alpha dx,\ \Delta y = \alpha dy,\ \Delta z = \alpha dz,\ \text{etc.} \ldots,$$

wo α eine unendlich kleine Größe bezeichnet; so hat man nach der Formel (17) der vorigen Vorlesung:

$$(4)\qquad du = \lim \frac{\Delta u}{\alpha},\ dv = \lim \frac{\Delta v}{\alpha},$$

$$dw = \lim \frac{\Delta w}{\alpha}, \ldots ds = \lim \frac{\Delta s}{\alpha}.$$

Dividirt man dann die beiden Theile der Gleichung (2) durch α und geht zu den Grenzen über, so erhält man:

$$(5)\quad ds = \Phi(u, v, w, \ldots) du + X(u, v, w, \ldots) dv$$
$$+ \Psi(u, v, w, \ldots) dw + \ldots$$

Der durch die Gleichung (5) gegebene Werth von ds ist dem ähnlich, welchen die Gleichung (9) der vorhergehenden Vorlesung für du gab. Der Hauptunterschied besteht darin, daß die in dem Werthe von du vorkommenden Differenziale $dx, dy, dz, \ldots$ willkührliche Constanten sind, während die Differenziale $du, dv, dw, \ldots$ neue, auf eine gewisse Weise mit den willkührlichen Constanten $dx, dy, dz, \ldots$ verbundene Functionen der unabhängigen Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ sind.

Der eben gegebene Beweis der Formel (5) setzt voraus, daß die Functionen $u, v, w, \ldots s$ nebst ihren Incrementen und Differenzialen reell sind. Wenn diese Functionen, Incremente und Differenziale imaginär würden, so brauchte man, um die Formel (5) abzuleiten, nur auf die Gleichung (10) der vorigen Vorlesung zurückzugehen. Denn da diese Gleichung für alle endlichen, reellen oder imaginären Werthe der Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ und für alle unendlich kleinen Werthe der Incremente $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ gilt; so folgt daraus, wenn man $u, v, w, \ldots$ für $x, y, z, \ldots$ und die Function F für f setzt.

$$(6)\quad F(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w, \ldots) - F(u, v, w, \ldots)$$
$$= [\Phi(u, v, w, \ldots) + I] \Delta u + [X(u, v, w, \ldots) + J] \Delta v$$
$$+ [\Psi(u + \Delta u, v + \Delta v, w, \ldots) + K] \Delta w + \text{etc.} \ldots$$

In der Formel (6) bezeichnen $I, J, K, \ldots$ wieder Größen, welche sich mit $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ gleichzeitig der Null unendlich nähern. Gibt man ferner den Incrementen $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ die durch die Gleichungen (3) bestimmten Werthe; so genügt es offenbar, um die Formel (5) wieder zu erhalten, die beiden Theile der Gleichung (6) durch α zu dividiren, und zu den Grenzen überzugehen.

ten Falle $y = \pm\sqrt{a^2+x^2}$ ist; so folgt aus den vorigen Formeln:

$$(15)\quad d(\sqrt{a^2-x^2}) = -\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad d(\sqrt{a^2+x^2}) = \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

was sich leicht direct nachweisen läßt.

Bezeichnet man die Function $f(x, y, z\ldots)$ durch u, so können die Gleichungen (13), (14) folgendergestalt geschrieben werden:

$$(16)\qquad u = 0,$$

$$(17)\qquad du = 0.$$

Wenn die Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ statt durch eine Gleichung von der Form $u = 0$, durch zwei Gleichungen dieser Art:

$$(18)\qquad u = 0,\ v = 0$$

mit einander verbunden wären; so hätte man zu gleicher Zeit die beiden Differenzialgleichungen:

$$(19)\qquad du = 0,\ dv = 0,$$

durch welche man die Differenziale zweier Veränderlichen, die als unentwickelte Functionen aller übrigen angesehen werden, bestimmen könnte.

Im Allgemeinen, wenn n Veränderliche $x, y, z, \ldots$ durch m Gleichungen

$$(20)\qquad u = 0,\ v = 0,\ w = 0,\ \text{etc.}$$

unter sich verbunden sind; so hat man zu gleicher Zeit die m Differenzialgleichungen:

$$(21)\qquad du = 0,\ dv = 0,\ dw = 0,\ \text{etc.}\ldots,$$

vermittelst welcher man die Differenziale von m Veränderlichen, als unentwickelte Functionen aller übrigen betrachtet, bestimmen kann.

Die in Beziehung auf die Differenzirung der zusammengesetzten Functionen vorhin aufgestellten Prinzipien geben auch das Mittel an die Hand zu dem Beweise eines bemerkenswerthen Satzes, welcher der **Lehrsatz von den homogenen Functionen** genannt wird.

Man sagt, eine Function mehrerer Veränderlichen ist **homogen**, wenn man, indem man alle Veränderlichen in einem gegebenen Verhältnisse wachsen oder abnehmen läßt, den ursprünglichen Werth dieser Function, mit einer Potenz dieses Verhältnisses multiplicirt, zum Resultate erhält. Der Exponent dieser Potenz ist der **Grad** der homogenen Function. Mithin ist $f(x, y, z, \ldots)$ eine homogene Function des Grades a von $x, y, z\ldots$, wenn für

jeden Werth der andern Veränderlichen

(22) $$f(tx, ty, tz, \ldots) = t^a f(x, y, z, \ldots)$$

ist.

Hiernach kann man das Theorem der homogenen Functionen folgendermaßen ausdrücken:

Lehrsatz. Wenn man die partiellen abgeleiteten Functionen einer homogenen Function des Grades a durch die Veränderlichen, worauf sie sich beziehen, multiplicirt; so ist die Summe der auf diese Weise gebildeten Producte gleich dem Producte, welches man erhielte, wenn man die Function selbst mit a multiplicirte.

Beweis. Es sei

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

die gegebene Function, und

$$\varphi(x, y, z, \ldots), \ \chi(x, y, z, \ldots), \ \psi(x, y, z, \ldots), \text{ etc} \ldots$$

seien ihre partiellen derivirten Functionen nach x, nach y, nach z,..... Differenzirt man die beiden Theile der Gleichung (22), indem man t allein als veränderlich betrachtet; so erhält man vermöge der Formel (5):

$$\varphi(tx, ty, tz, \ldots) x\,dt + \chi(tx, ty, tz, \ldots) y\,dt$$
$$+ \psi(tx, ty, tz, \ldots) z\,dt + \ldots = a t^{a-1} f(x, y, z, \ldots) dt.$$

Dividirt man nun durch dt, und setzt t=1; so findet man:

(23) $$x\varphi(x, y, z, \ldots) + y\chi(x, y, z, \ldots)$$
$$+ z\psi(x, y, z, \ldots) + \ldots = af(x, y, z \ldots),$$

oder, was einerlei ist:

(24) $$x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} + z\frac{du}{dz} + \ldots = au.$$

Zusatz. Für eine homogene Function des Grades 0 hat man:

(25) $$x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} + z\frac{du}{dz} + \ldots = 0.$$

Beispiele. Setzt man:

$$u = \tfrac{1}{2}(Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Czx + 2Fxy),$$

so gibt die Gleichung (24):

$$(Ax+Fy+Ez)x+(Fx+By+Dz)y+(Ex+Dy+Cz)z=$$
$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy.$$

Setzt man hingegen:

$$u=L\left(\frac{x}{y}\right),$$

so reducirt sich die Gleichung (25) auf:

$$\frac{x}{y}-\frac{x}{y}=0.$$

Achtzehnte Vorlesung.

Differenziale der verschiedenen Ordnungen für die Functionen mehrerer veränderlicher Größen.

Es sei

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

eine Function mehrerer unabhängiger Veränderlicher $x, y, z, \ldots$ Wenn man diese Function mehrere Male nach allen Veränderlichen, oder nur nach einer derselben differenzirt; so wird man mehrere neue Functionen erhalten, wovon jede die totale, oder partielle abgeleitete Function der vorhergehenden ist. Man könnte sogar annehmen, daß sich die successiven Differenzirungen bald auf die eine, bald auf die andere Veränderliche beziehen. In allen Fällen ist das Resultat von einer Differenzirung, oder von zwei, drei,... successive verrichteten Differenzirungen, ein sogenanntes totales oder partielles Differenzial der ersten, zweiten, dritten,..... Ordnung. Differenzirt man z. B. mehrere Male nach allen Veränderlichen, so werden die Totaldifferenziale $du, ddu, dddu, \ldots$ gebildet, welche man der Kürze wegen durch $du, d^2u, d^3u, \ldots$ bezeichnet. Differenzirt man im Gegentheil mehrere Male nach der Veränderlichen x, so bildet man die partiellen Differenziale $d_x u, d_x d_x u, d_x d_x d_x u, \ldots$, welche durch $d_x u, d_x^2 u, d_x^3 u, \ldots$ bezeichnet werden. Allgemein, wenn n irgend eine ganze Zahl ist, so wird das Totaldifferenzial der Ordnung n durch $d^n u$, und das partielle Differenzial derselben Ordnung in Beziehung auf die Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ durch $d_x^n u, d_y^n u, d_z^n u, \ldots$ bezeichnet. Wenn man zwei, oder mehrere Male in Beziehung auf zwei, oder mehrere Veränderliche differenzirte, so würde man die durch $d_x d_y u, d_y d_x u, d_x d_z u, \ldots$ $d_x d_y d_z u, \ldots$ bezeichneten Differenziale erhalten. Nun ist aber leicht einzusehen, daß die Differenziale dieser Art dieselben Werthe behalten, wenn man die Ordnung, nach welcher die Differenzirungen in Beziehung auf die verschiedenen Veränderlichen verrichtet werden sollen, umkehrt. Es ist z. B.

$$d_x d_y u = d_y d_x u, \tag{1}$$

welches in der That auf folgende Art bewiesen werden kann.

Es bezeichne $\Delta_x u$ das Increment, welches eine Function u von $x, y, z, \ldots$ bekommt, wenn man x allein um eine unendlich kleine Größe αdx wachsen läßt; so findet man:

$$(2) \quad \Delta_x u = f(x + \alpha dx, y, z \ldots) - f(x, y, z \ldots,)$$

$$d_x u = \lim \frac{\Delta_x u}{\alpha},$$

$$(3) \qquad \Delta_x d_y u = d_y (u + \Delta_x u) - d_y u = d_y \Delta_x u,$$

und folglich:

$$\frac{\Delta_x d_y u}{\alpha} = \frac{d_y \Delta_x u}{\alpha} = d_y \frac{\Delta_x u}{\alpha}$$

Läßt man nun α gegen die Grenze Null convergiren, und berücksichtigt die zweite der Formeln (2); so erhält man die Gleichung (1). Auf dieselbe Weise würde man darthun, daß $d_x d_z u = d_z d_x u$, $d_y d_z u = d_z d_y u, \ldots$ ist.

Beispiel. Wenn man $u = \text{arc. tang} \frac{x}{y}$ setzt, so erhält man:

$$d_x u = \frac{y}{x^2 + y^2} dx, \qquad d_y u = \frac{-x}{x^2 + y^2} dy,$$

$$d_y d_x u = d_x d_y u = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx\, dy.$$

Wenn die Gleichung (1) einmal bewiesen ist, so folgt daraus, daß es in einem Ausdrucke von der Form $d_x d_y d_z \ldots u$ immer gestattet ist, die Veränderlichen zu vertauschen, auf welche sich zwei nach einander folgende Differenzirungen beziehen. Nun ist aber klar, daß man vermittelst einer oder mehrerer Vertauschungen dieser Art die Ordnung der Differenzirungen auf alle möglichen Weisen verändern kann. Um z. B. aus dem Differenziale $d_x d_y d_z u$ das Differenzial $d_z d_y d_x u$ abzuleiten, braucht man nur den Buchstaben x durch zwei nach einander folgende Vertauschungen an die Stelle von z zu bringen, und dann die Buchstaben y und z zu vertauschen, um den Buchstaben y auf die zweite Stelle zu bringen. Man kann also behaupten, daß ein Differenzial von der Form $d_x d_y d_z \ldots u$ einen von der Ordnung der nach den verschiedenen Veränderlichen verrichteten Differenzirungen unabhängigen Werth hat. Dieser Satz gilt selbst in dem Falle, wo mehrere Differenzirungen sich auf dieselbe Veränderliche beziehen, wie solches bei den Differenzialen $d_x d_y d_x u$, $d_x d_y d_x d_x u$, etc... der Fall ist. Wenn sich in diesem Falle zwei, oder mehrere Differenzirungen auf die Veränderliche x beziehen, so schreibt man der Kürze wegen d_x^2 statt $d_x d_x$, d_x^3 statt $d_x d_x d_x$, etc... Hiernach ist:

$$d_x^2 d_y u = d_x d_y d_x u, \quad d_x^3 d_y d_z u = d_x d_y d_x d_z d_x u$$
$$= d_y d_x^3 d_z u \ldots$$

$d_x^2 d_y^3 u = d_y^3 d_x^2 u$, $d_x d_y^2 d_z^3 u = d_x d_z^3 d_y^2 u = d_y^2 d_x d_z^3 u = \ldots$,

und im Allgemeinen, wenn l, m, n,... irgend welche ganze Zahlen sind:

(4) $d_x^l d_y^m d_z^n \ldots u = d_x^l d_z^n d_y^m \ldots u = d_y^m d_x^l d_z^n \ldots u = \text{etc} \ldots$

Da man, wenn man eine Function mehrerer unabhängiger Veränderlicher x, y, z,... nach einer derselben differenzirt, eine neue, mit dem endlichen constanten Factor dx, oder dy, oder dz,... multiplicirte Function zum Resultate erhält, und da bei dem Differenziren eines Productes die constanten Factoren immer vor das Zeichen d treten; so leuchtet ein, daß, wenn man die Function $u = f(x, y, z, \ldots)$ hinter einander l mal nach x, m mal nach y, n mal nach z,.... differenzirt, das aus diesen verschiedenen Operationen resultirende Differenzial, nämlich $d_x^l d_y^m d_z^n, \ldots u$, das Product einer neuen Function von x, y, z,... mit den Factoren dx, dy, dz,..., den ersten zur lten, den zweiten zur mten, den dritten zur nten,... Potenz erhoben, sein wird. Diese neue Function nennt man die partielle abgeleitete Function der Ordnung $l+m+n+\ldots$ von u. Bezeichnet man sie durch $\varpi(x, y, z, \ldots)$, so hat man:

(5) $d_x^l d_y^m d_z^n \ldots u = \varpi(x, y, z, \ldots) dx^l dy^m dz^n \ldots$

und folglich:

(6) $$\varpi(x, y, z, \ldots) = \frac{d_x^l d_y^m d_z^n \ldots u}{dx^l dy^m dz^n \ldots}.$$

Es ist leicht, die Totaldifferenziale $d^2 u$, $d^3 u$,... durch die partiellen Differenziale der Function u, oder durch ihre partiellen abgeleiteten Functionen auszudrücken. Denn die Formel (12) Vorles. 16 gibt:

$$\begin{aligned} d^2 u = ddu &= d_x du + d_y du + d_z du + \ldots \\ &= d_x(d_x u + d_y u + d_z u + \ldots) + d_y(d_x u + d_y u + d_z u + \ldots) \\ &\quad + d_z(d_x u + d_y u + d_z u + \ldots) + \text{etc} \ldots, \end{aligned}$$

und folglich:

(7) $$d^2 u = d_x^2 u + d_y^2 u + d_z^2 u + \ldots 2 d_x d_y u + 2 d_x d_z u + 2 d_y d_z u + \ldots,$$

oder, was einerlei ist:

(8) $$d^2 u = \frac{d_x^2 u}{dx^2} dx^2 + \frac{d_y^2 u}{dy^2} dy^2 + \frac{d_z^2 u}{dz^2} dz^2 + \ldots$$
$$+ 2 \frac{d_x d_y u}{dx\, dy} dx\, dy + 2 \frac{d_x d_z u}{dx\, dz} dx\, dz + 2 \frac{d_y d_z u}{dy\, dz} dy\, dz + \ldots$$

Mit derselben Leichtigkeit würde man die Werthe von $d^3 u$, $d^4 u$,... finden.

Beispiele.

$$d^2(xyz)=2(x\,dy\,dz+y\,dx\,dz+z\,dx\,dy)$$

$$d^3(xyz)=6\,dx\,dy\,dz$$

$$d^2(x^2+y^2+z^2\ldots)=2(dx^2+dy^2+dz^2\ldots),$$

$$d^3(x^3+y^3+z^3+\ldots)=6(dx^3+dy^3+dz^3\ldots)$$

Der Kürze wegen läßt man gewöhnlich in den Gleichungen (6), (8)... die unten an das Zeichen d geschriebenen Buchstaben weg, und setzt für den zweiten Theil der Gleichung (6) die Bezeichnung:

(9) $$\frac{d^{l+m+n+\ldots}u}{dx^l\,dy^m\,dz^n\ldots}.$$

Alsdann werden die partiellen abgeleiteten Functionen der zweiten Ordnung durch:

$$\frac{d^2u}{dx^2},\ \frac{d^2u}{dy^2},\ \frac{d^2u}{dz^2},\ \frac{d^2u}{dx\,dy},\ \frac{d^2u}{dx\,dz},\ \frac{d^2u}{dy\,dz},$$

die der dritten Ordnung durch:

$$\frac{d^3u}{dx^3},\ \frac{d^3u}{dx^2\,dy},\ \frac{d^3u}{dx\,dy^2},\ldots,\ \text{etc.}\ldots,$$

ausgedrückt, und der Werth von d^2u verwandelt sich in:

(10) $$d^2u=\frac{d^2u}{dx^2}dx^2+\frac{d^2u}{dy^2}dy^2+\frac{d^2u}{dz^2}dz^2+\ldots$$

$$+2\frac{d^2u}{dx\,dy}dx\,dy+2\frac{d^2u}{dx\,dz}dx\,dz+\ldots+2\frac{d^2u}{dy\,dz}dy\,dz\ldots.$$

Aber in diesem Werthe dürfen die Differenziale dx, dy, dz,.... nicht weggestrichen werden, weil $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dx\,dy}$ nicht die Quotienten der Division von d^2u durch dx^2 oder durch $dx\,dy$,... bezeichnen.

Wenn man statt der Function $u=f(x, y, z,\ldots)$ die folgende:

(11) $$s=F(u, v, w,\ldots.)$$

betrachtete, wo $u, v, w,\ldots$ selbst wieder Functionen der unabhängigen Veränderlichen $x, y, z,\ldots$ sind; so ließen sich die Werthe von d^2s, d^3s,... leicht aus den in der Vorlesung 17 aufgestellten Prinzipien herleiten. In der That, differenzirte man die Gleichung (11) mehrere Male nach einander, so würde man finden:

$$(12)\left\{\begin{aligned}
ds &= \frac{dF(u, v, w, \ldots)}{du} du \\
&+ \frac{dF(u, v, w, \ldots)}{dv} dv + \frac{dF(u, v, w, \ldots)}{dw} dw + \\
d^2 s &= \frac{d^2 F(u, v, w, \ldots)}{du^2} du^2 + \ldots \\
&+ 2 \frac{dF(u, v, w, \ldots)}{du\,dv} du\,dv + \ldots \\
&+ \frac{d^2 F(u, v, w, \ldots)}{dv^2} dv^2 + \text{etc} \ldots \\
&\text{etc} \ldots
\end{aligned}\right.$$

Beispiele.

$$d^n(u+v) = d^n u + d^n v, \quad d^n(u-v) = d^n u - d^n v,$$

$$d^n(u + v\sqrt{-1}) = d^n u + d^n v \sqrt{-1},$$

$$d^n(au + bv + cw + \ldots) = a d^n u + b d^n v + c d^n w + \ldots$$

Unter den Gleichungen, welche man aus den Formeln (12) herleiten kann, muß man die herausheben, welche die Differenziale einer Function s mehrerer Veränderlicher $u, v, w, \ldots$, wovon jede eine lineäre Function anderer unabhängiger Veränderlicher $x, y, z, \ldots$ ist, ausdrücken. Denn es seien $a, b, c, \ldots k$ constante Größen, und

$$(13) \qquad u = ax + by + cz + \ldots + k$$

eine lineäre Function der unabhängigen Veränderlichen $x, y, z, \ldots$, so ist das Differenzial:

$$(14) \qquad du = a\,dx + b\,dy + c\,dz + \ldots$$

auch eine constante Größe, und die Differenziale $d^2 u$, $d^3 u, \ldots$ reduciren sich folglich auf Null. Hieraus folgt nun unmittelbar, daß die successiven Differenziale der Functionen:

$$F(u), \; F(u, v), \; F(u, v, w, \ldots),$$

dieselbe Form behalten, wenn man $u, v, w, \ldots$ als unabhängige Veränderliche betrachtet, oder wenn $u, v, w, \ldots$ lineäre Functionen der unabhängigen Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ sind. Sonach findet man in beiden Fällen für $s = F(u)$:

$$(15) \quad ds = F'(u)\,du, \; d^2 s = F''(u)\,du^2, \ldots d^n s = F^{(n)}(u)\,du^n.$$

für $s = F(u, v)$:

$$(16)\quad d^n s = \frac{d^n F(u, v)}{du^n} du^n + \frac{n}{1} \frac{d^n F(u, v)}{du^{n-1} dv} du^{n-1} dv + \dots$$

$$+ \frac{n}{1} \frac{d^n F(u, v)}{du\, dv^{n-1}} du\, dv^{n-1} + \frac{d^n F(u, v)}{dv^n} dv^n ;$$

für $s = F(u) . F(v)$;

$$(17)\quad d^n s = F^{(n)}(u) F(v) du^n + \frac{n}{1} F^{(n-1)}(u) F'(v) du^{n-1} dv + \dots$$

$$\frac{n}{1} F'(u) F^{(n-1)}(v) du\, dv^{n-1} + F(u) F^{(n)}(v) dv^n ;$$

etc....

Diese verschiedenen Gleichungen gelten auch dann, wenn die in den linearen Functionen $u, v, w, \dots$ von $x, y, z, \dots$ vorkommenden Constanten $a, b, c, \dots k$, imaginär werden. Es ist z. B. für $s = F(x + y\sqrt{-1})$:

$$(18)\quad ds = F'(x + y\sqrt{-1})(dx + dy\sqrt{-1}), \dots$$

$$d^n s = F^{(n)}(x + y\sqrt{-1})(dx + dy\sqrt{-1})^n,$$

für $s = F(x - y\sqrt{-1})$:

$$(19)\quad ds = F'(x - y\sqrt{-1})(dx - dy\sqrt{-1}), \dots$$

$$d^n s = F^{(n)}(x - y\sqrt{-1})(dx - dy\sqrt{-1})^n,$$

und für $s = F(x + y\sqrt{-1}) . F(x - y\sqrt{-1})$:

$$(20)\quad d^n s = F^{(n)}(x + y\sqrt{-1}) . F(x - y\sqrt{-1})(dx + dy\sqrt{-1})^n +$$

$$\frac{n}{1} F^{(n-1)}(x + y\sqrt{-1}) F'(x - y\sqrt{-1})(dx + dy\sqrt{-1})^{n-1}(dx - dy\sqrt{-1})$$

$$+ \text{etc} \dots +$$

$$\frac{n}{1} F(x + y\sqrt{-1}) F^{(n-1)}(x - y\sqrt{-1})(dx + dy\sqrt{-1})(dx - dy\sqrt{-1})^{n-1}$$

$$+ F(x + y\sqrt{-1}) F^{(n)}(x - y\sqrt{-1})(dx - dy\sqrt{-1})^n ..$$

Mit der größten Leichtigkeit würde man auch die Differenziale der unentwickelten Functionen mehrerer independent veränderlicher Größen erhalten. Man brauchte nur die Gleichungen, welche diese Functionen bestimmen, ein oder mehrere Male zu differenziren, indem man die Differenziale der unabhängigen Veränderlichen als constant, und die übrigen Differenziale als neue Functionen dieser Veränderlichen betrachtet.

Neunzehnte Vorlesung.

Methoden zur einfachern Bestimmung der Totaldifferenziale mehrerer unabhängiger Veränderlicher. Symbolische Werthe dieser Differenziale.

Es sei

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

wieder eine Function mehrerer unabhängiger Veränderlicher $x, y, z, \ldots$, und wir wollen ihre partiellen abgeleiteten Functionen der ersten Ordnung in Beziehung auf x, auf y, auf $z, \ldots$ durch:

$$\varphi(x, y, z, \ldots), \; \chi(x, y, z, \ldots), \; \psi(x, y, z, \ldots), \text{ etc.} \ldots$$

bezeichnen. Wird wieder, wie in der sechzehnten Vorlesung:

$$(1) \qquad F(\alpha) = f(x + \alpha dx, \; y + \alpha dy, \; z + \alpha dz, \ldots)$$

gesetzt, und werden die beiden Theile der Gleichung (1) in Beziehung auf die Veränderliche α differenzirt; so erhält man:

$$(2) \qquad F'(\alpha) = \varphi(x + \alpha dx, \; y + \alpha dy, \; z + \alpha dz, \ldots) dx + \chi(x + \alpha dx, \; y + \alpha dy, \; z + \alpha dz, \ldots) dy + \psi(x + \alpha dx, \; y + \alpha dy, \; z + \alpha dz, \ldots) dz + \ldots$$

Wenn man in dieser Formel $\alpha = 0$ setzt, so erhält man folgende:

$$(3) \qquad F'(0) = \varphi(x, y, z, \ldots) dx + \chi(x, y, z, \ldots) dy + \psi(x, y, z, \ldots) dz + \ldots = du,$$

welche mit der Gleichung (20) Vorles. 16 übereinstimmt. Ferner folgt offenbar aus der Vergleichung der Gleichungen (1) und (2), daß man, wenn man eine Function der veränderlichen Größen:

$$(4) \qquad x + \alpha dx, \; y + \alpha dy, \; z + \alpha dz, \ldots$$

in Beziehung auf α differenzirt, eine andere, auf eine gewisse Weise mit den Constanten dx, dy, $dz, \ldots$ verbundene Function dieser

Größen als derivirte Function erhält. Da neue Differenzirungen nach der Veränderlichen α neue Functionen derselben Art erzeugen müssen, so sind wir berechtigt, zu schließen, daß die Ausdrücke (4) die einzigen veränderlichen Größen sind, welche nicht nur in $F(\alpha)$, $F'(\alpha)$, sondern auch in $F''(\alpha)$, $F'''(\alpha)$, ... und allgemein in $F^{(n)}(\alpha)$ vorkommen, wo n irgend welche ganze Zahl bezeichnet. Mithin sind die Differenzen:

$$F(\alpha)-F(0),\ F'(\alpha)-F'(0),\ F''(\alpha)-F''(0),\ldots F^{(n)}(\alpha)-F^{(n)}(0)$$

genau den Incrementen gleich, welche die durch

$$F(0),\ F'(0),\ F''(0),\ldots F^{(n)}(0)$$

ausgedrückten Functionen von $x, y, z, \ldots$ bekommen, wenn man den unabhängigen Veränderlichen die unendlich kleinen Incremente αdx, αdy, $\alpha dz, \ldots$ beilegt. Hiernach findet man successive, da $F(0)=u$ ist, wenn man α gegen die Grenze Null convergiren läßt:

$$F'(0)=\lim\frac{F(\alpha)-F(0)}{\alpha}=\lim\frac{\Delta u}{\alpha}=du,$$

$$F''(0)=\lim\frac{F'(\alpha)-F'(0)}{\alpha}=\lim\frac{\Delta du}{\alpha}=ddu=d^2u,$$

$$F'''(0)=\lim\frac{F''(\alpha)-F''(0)}{\alpha}=\lim\frac{\Delta d^2u}{\alpha}=dd^2u=d^3u,$$

etc. ...,

$$F^{(n)}(\alpha)=\lim\frac{F^{(n-1)}(\alpha)-F^{(n-1)}(0)}{\alpha}=\lim\frac{\Delta d^{n-1}u}{\alpha}$$

$$=dd^{n-1}u=d^nu.$$

Kurz es ist:

$$(5)\quad u=F(0),\ du=F'(0),\ d^2u=F''(0),\ldots d^nu=F^{(n)}(0).$$

Um also die Totaldifferenziale du, d^2u, $d^3u, \ldots d^nu$ zu erhalten, braucht man nur die besondern Werthe zu berechnen, welche die abgeleiteten Functionen $F'(\alpha)$, $F''(\alpha), \ldots F^{(n)}(\alpha)$ für $\alpha=0$ annehmen.

Unter den Methoden, welche zur einfachern Bestimmung der Totaldifferenziale dienen können, verdienen besonders die noch hervorgehoben zu werden, welche sich auf die Betrachtung der symbolischen Werthe dieser Differenziale gründen.

In der Analysis nennt man jede Verbindung algebraischer Zeichen, die an und für sich nichts bedeutet, oder welcher man einen andern Werth beilegt, als den, welchen sie natürlicher Weise haben müßte, einen **symbolischen Ausdruck** oder ein **Symbol**. Ebenso nennt man **symbolische Gleichungen** alle die, welche buchstäblich genommen, oder nach den allgemein angenommenen Bezeichnungen erklärt, ungenau sind, oder keinen Sinn haben, woraus man aber genaue Resultate ableiten kann, wenn man entweder die Gleichungen

selbst, oder die in ihnen vorkommenden Symbole nach bestimmten Regeln modificirt oder abändert. Zu den symbolischen Gleichungen, deren Kenntniß von Nutzen ist, sind besonders die imaginären Gleichungen (siehe algebr. Analysis Cap. VII) und die, welche wir jetzt aufstellen wollen, zu rechnen.

Bezeichnet man durch a, b, c,... constante Größen, und durch l, m, n,...p, q, r... ganze Zahlen, so wird das Totaldifferenzial des Ausdruckes:

$$(6) \qquad a d_x^l d_y^m d_z^n \ldots u + b d_x^p d_y^q d_z^r \ldots u + \text{etc} \ldots$$

durch die Formel gegeben:

$$(7) \quad d[a d_x^l d_y^m d_z^n \ldots u + b d_x^p d_y^q d_z^r \ldots u + \text{etc} \ldots] =$$
$$d_x[a d_x^l d_y^m d_z^n \ldots u + b d_x^p d_y^q d_z^r \ldots u + \ldots]$$
$$+ d_y[a d_x^l d_y^m d_z^n \ldots u + b d_x^p d_y^q d_z^r \ldots u + \ldots]$$
$$+ d_z[a d_x^l d_y^m d_z^n \ldots u + b d_x^p d_y^q d_z^r \ldots u + \ldots] + \ldots$$
$$= a d_x^{l+1} d_y^m d_z^n \ldots u + a d_x^l d_y^{m+1} d_z^n \ldots u + a d_x^l d_y^m d_z^{n+1} \ldots u + \ldots$$
$$+ b d_x^{p+1} d_y^q d_z^r \ldots u + \text{etc} \ldots.$$

Aus dieser Formel, verbunden mit der Gleichung (4) Vorles. 18, ergibt sich unmittelbar folgender Satz.

Lehrsatz. Um das Totaldifferenzial des Ausdruckes (6) zu erhalten, braucht man nur das Product der beiden Factoren $a d_x^l d_y^m d_z^n \ldots + b d_x^p d_y^q d_z^r \ldots + \ldots$ und u durch d zu multipliciren, wenn man $d = d_x + d_y + d_z + \ldots$ setzt und mit den Bezeichnungen $d, d_x, d_y, d_z, \ldots$ operirt, wie wenn sie wirkliche, von einander verschiedene, Größen ausdrückten, dann das neue Product zu entwickeln, indem man in den verschiedenen Gliedern die Factoren a, b, c... zuerst und den Buchstaben u zuletzt setzt, und endlich anzunehmen, daß die Bezeichnungen $d_x, d_y, d_z, \ldots$ keine Größen mehr ausdrücken, sondern ihre ursprüngliche Bedeutung wieder bekommen.

Bestimmt man vermittelst dieses Lehrsatzes das Totaldifferenzial des Ausdruckes:

$$(8) \qquad d_x u + d_y u + d_z u + \ldots,$$

so wird man genau den Werth von $d^2 u$ erhalten, welchen die Gleichung (7) der vorhergehenden Vorlesung gibt, und wendet man den Lehrsatz von neuem auf diesen Werth von $d^2 u$ an; so bekommt man den von $d^3 u$, etc...

Anmerk. Wenn man die Multiplicationen, vermittelst welcher man nach unserm Lehrsatze das Totaldifferenzial des Ausdruckes (6) berechnen kann, bloß anzeigt; so erhält man statt der Gleichung (7)

die symbolische Formel:

$$(9)\ \begin{cases} d[a\, d_x^l d_y^m d_z^n \ldots u + b\, d_x^p d_y^q d_z^r \ldots u + \ldots] = \\ (a\, d_x^l d_y^m d_z^n \ldots + b\, d_x^p d_y^q d_z^r \ldots + \ldots)(d_x + d_y + d_z + \ldots) u. \end{cases}$$

Da die Bezeichnungen d_x, d_y, d_z, ... in der Formel (9) zur Darstellung der Differenziale angewandt worden sind, so hat diese Formel, buchstäblich genommen, keinen Sinn; aber sie wird wieder richtig, so bald man ihren zweiten Theil nach den gewöhnlichen Regeln der algebraischen Multiplication entwickelt, und mit d_x, d_y, d_z ... wie mit wirklichen Größen operirt.

Wenn man für den Ausdruck (6) den Ausdruck (8) substituirt, und diesen mehrere Male nach einander differenzirt; so erhält man durch dasselbe Verfahren die symbolischen Werthe der Totaldifferenziale $d^2 u$, $d^3 u$, ... nämlich:

$$(d_x + d_y + d_z + \ldots)(d_x + d_y + d_z + \ldots) u,$$
$$(d_x + d_y + d_z + \ldots)(d_x + d_y + d_z + \ldots)(d_x + d_y + d_z + \ldots) u, \text{ etc...}$$

Verbindet man diese symbolischen Werthe mit dem von du, und schreibt der Kürze wegen:

$$(d_x + d_y + d_z + \ldots)^2 = (d_x + d_y + d_z + \ldots)(d_x + d_y + d_z + \ldots),$$
$$(d_x + d_y + d_z + \ldots)^3 = (d_x + d_y + d_z + \ldots)(d_x + d_y + d_z + \ldots)(d_x + d_y + d_z \ldots), \text{ etc...};$$

so bildet man die symbolischen Gleichungen:

$$(10)\ du = (d_x + d_y + d_z + \ldots) u,\ d^2 u = (d_x + d_y + d_z + \ldots)^2 u,$$
$$d^3 u = (d_x + d_y + d_z + \ldots)^3 u, \text{ etc...},$$

und allgemein, wenn n irgend welche ganze Zahl bezeichnet:

$$(11)\qquad d^n u = (d_x + d_y + d_z + \ldots)^n u.$$

Es sei nun:

$$(12)\qquad s = F(u, v, w, \ldots),$$

wo u, v, w, ... Functionen der independenten Veränderlichen x, y, z, ... sind; so ist auch:

$$(13)\qquad d^n s = (d_u + d_v + d_w + \ldots)^n s.$$

Der zweite Theil dieser letzten Gleichung läßt sich in dem besondern Falle, wo u bloß als eine Function von x, v bloß als eine Function von y, w bloß als eine Function von z, etc... angesehen wird, leicht entwickeln. Um übrigens von diesem besondern Falle zu dem allgemeinen überzugehen, braucht man offenbar für

$$d_x u,\ d_x^2 u,\ d_x^3 u, \ldots \text{ nur } du,\ d^2 u,\ d^3 u, \ldots,$$
$$\text{für } d_y v,\ d_y^2 v,\ d_y^3 v \ldots \text{ nur } dv,\ d^2 v,\ d^3 v, \ldots, \text{ etc...}$$

zu setzen, d. h. die unten an dem Zeichen d stehenden Buchstaben x, y, z, ... wegzulassen. Es wird also in allen Fällen leicht sein, aus der Formel (13) den Werth von $d^n s$ abzuleiten. Um die Begriffe zu fixiren, sei $s = uv$, so findet man, wenn man, wie eben gesagt worden, verfährt:

$$(14)\quad d^n(uv) = u\, d_y^n v + \frac{n}{1} d_x u\, d_y^{n-1} v + \frac{n(n-1)}{1.2} d_x^2 u\, d_y^{n-2} v + \dots$$

$$\dots + \frac{n}{1} d_y v\, d_x^{n-1} u + v\, d_x^n u.$$

$$(15)\quad d^n(uv) = u\, d^n v + \frac{n}{1} du\, d^{n-1} v + \frac{n(n-1)}{1.2} d^2 u\, d^{n-2} v + \dots$$

$$\dots + \frac{n}{1} dv\, d^{n-1} u + v\, d^n u.$$

Die letzte Formel bleibt für alle Werthe von u, v und x, y gültig, und selbst in dem Falle, wo sich u, v auf zwei Functionen von x reduciren.

Beispiel.

$$d^n\left(\frac{e^{ax}}{x}\right) = \frac{a^n e^{ax}}{x}\left(1 - \frac{n}{ax} + \frac{n(n-1)}{a^2 x^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{a^3 x^3} + \dots \right.$$

$$\left. \pm \frac{n(n-1)\dots 3.2.1}{a^n x^n}\right) dx^n.$$

Zwanzigste Vorlesung.

Maxima und Minima der Functionen mit mehreren veränderlichen Größen

Wenn eine Function von mehreren unabhängigen Veränderlichen $x, y, \ldots$ einen besondern reellen Werth bekommt, der größer ist, als alle reellen benachbarten Werthe, d. h. als alle, welche man erhält, wenn man $x, y, z, \ldots$ um sehr kleine Größen wachsen oder abnehmen läßt; so wird dieser besondere Werth der Function ein **Maximum** genannt.

Wenn ein besonderer Werth einer Function von $x, y, z \ldots$ reell und kleiner als alle benachbarten reellen Werthe ist; so nennt man denselben ein **Minimum**.

Die Bestimmung der **Maxima und Minima** der Functionen von mehreren veränderlichen Größen läßt sich leicht auf die Bestimmung der **Maxima und Minima** der Functionen von einer einzigen Veränderlichen zurückführen. Denn gesetzt

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

würde für gewisse besondere Werthe der Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ ein **Maximum**, so muß, wenn man diesen besondern Werthen unendlich kleine Incremente $\Delta x, \Delta y, \Delta z \ldots$ beilegt, die so gewählt sind, daß der Ausdruck:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \ldots)$$

reell bleibt, beständig

$$(1) \quad f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \ldots) < f(x, y, z \ldots)$$

sein.

Damit nun die Incremente $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ unendlich klein werden, braucht man nur:

$$\Delta x = \alpha dx, \ \Delta y = \alpha dy, \ \Delta z = \alpha dz, \ldots$$

zu setzen, wo $dx, dy, dz \ldots$ beliebige endliche Größen sein können, und α eine positive, oder negative, aber unendlich kleine Größe bezeichnet. Folglich hat man nach der Voraussetzung für jeden be-

liebigen Werth von dx, dy, dz,...:

(2) $f(x+\alpha dx, y+\alpha dy, z+\alpha dz,\ldots)<f(x, y, z,\ldots)$,

wofern man sie so wählt, daß der erste Theil der Gleichung (2) reell bleibt. Setzt man nun der Kürze wegen:

(3) $f(x+\alpha dx, y+\alpha dy, z+\alpha dz,\ldots)=F(\alpha)$,

so verwandelt sich die Formel (2) in:

(4) $$F(\alpha)<F(0).$$

Da diese Formel für jedes Zeichen von α statt finden muß, so folgt, daß, wenn α allein variirt, $F(\alpha)$, als Function dieser einzigen Veränderlichen betrachtet, für $\alpha=0$ immer ein Maximum sein wird.

Ebenso wird man finden, daß, wenn $f(x, y, z,\ldots)$ für gewisse besondere Werthe von $x, y, z,\ldots$ ein Minimum wird, der Werth von $F(\alpha)$ immer für $\alpha=0$ ein Minimum sein wird.

Umgekehrt, wenn man den Veränderlichen $x, y, z,\ldots$ solche Werthe beilegt, daß $F(\alpha)$ für $\alpha=0$, und für beliebige Werthe von $dx, dy, dz,\ldots$ ein Maximum oder Minimum wird; so machen diese Werthe die Function $f(x, y, z,\ldots)$ offenbar auch zu einem Maximum oder Minimum.

Nun wollen wir bemerken, daß, wenn die beiden Functionen $F(\alpha)$, $F'(\alpha)$ in der Nähe des besondern Werthes $\alpha=0$ nach α stetig sind, dieser Werth nur dann ein Maximum oder Minimum der ersten Function geben kann, wenn die zweite für diesen Werth verschwindet, d. h. wenn man hat (Vorles. 7):

(5) $$F'(0)=0.$$

Da überdies (Formel 20, Vorles. 16)

(6) $$F'(0)=du$$

ist, so kann die Gleichung (5) auf die Form gebracht werden:

(7) $$du=0.$$

Da endlich $F(\alpha)$, $F'(\alpha)$ die Größen ausdrücken, in welche u und du übergehen, wenn man darin $x+\alpha dx$ statt x, $y+\alpha dy$ statt y, $z+\alpha dz$ statt z,... setzt; so ist klar, daß, wenn $F(\alpha)$, $F'(\alpha)$ in der Nähe des besondern Werthes $\alpha=0$ in Beziehung auf α discontinuirlich sind, die als Functionen von $x, y, z,\ldots$ betrachteten Ausdrücke u, du nach diesen Veränderlichen, in der Nähe der ihnen beigelegten besondern Werthe auch discontinuirlich sein werden. Aus diesen Bemerkungen, und dem weiter oben Gesagten dürfen wir schließen, daß nur die Werthe von $x, y, z,\ldots$ ein Maximum, oder Minimum der Function u geben können, welche die Functionen u und du discontinuirlich machen, oder vielmehr die, welche der Gleichung (7) Genüge leisten, was auch die endlichen Constanten dx, dy, dz,... sein mögen. Hiernach wird es leicht sein, folgende Aufgabe zu lösen.

Aufgabe. Die Maxima und Minima einer Function von mehreren Veränderlichen zu finden.

Auflösung. Es sei $u = f(x, y, z, \ldots)$ die gegebene Function. Man suche zuerst die Werthe von $x, y, z, \ldots$, welche die Function u oder du discontinuirlich machen, wozu die zu rechnen sind, welche sich aus der Gleichung:

$$(8) \qquad du = \pm\infty$$

ergeben. Zweitens suche man die Werthe von $x, y, z, \ldots$, welche der Gleichung (7) genügen, was auch immer die endlichen Constanten $dx, dy, dz, \ldots$ sein mögen.

Da diese Gleichung (7) auf die Form gebracht werden kann:

$$(9) \qquad \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \ldots = 0,$$

so ergeben sich daraus offenbar folgende:

$$(10) \qquad \frac{du}{dx} = 0, \ \frac{du}{dy} = 0, \ \frac{du}{dz} = 0. \text{ etc} \ldots,$$

wovon die erste erhalten wird, wenn man $dx = 1$, $dy = 0$, $dz = 0, \ldots$ setzt, die zweite, wenn man $dy = 1$, $dx = 0$, $dz = 0, \ldots$ setzt, etc... Wir wollen gelegentlich bemerken, daß man, da die Anzahl der Gleichungen (10) der der Unbekannten $x, y, z, \ldots$ gleich ist, aus denselben gewöhnlich nur eine begrenzte Anzahl von Werthen für diese Unbekannten wird ableiten können.

Betrachten wir nun eins der Systeme von Werthen, welche die vorhergehenden Untersuchungen für die Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ geben. Der correspondirende Werth der Function $f(x, y, z, \ldots)$ wird ein Maximum sein, wenn die Differenz:

$$(11) \quad f(x + \alpha dx, y + \alpha dy, z + \alpha dz, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)$$

für sehr kleine Zahlenwerthe von α, und für beliebige Werthe von $dx, dy, dz, \ldots$ beständig negativ ist. Im Gegentheil wird die Function $f(x, y, z, \ldots)$ ein Minimum werden, wenn diese Differenz stets positiv ist. Wenn endlich diese Differenz vom Positiven zum Negativen übergeht, während man entweder das Zeichen von α, oder die Werthe von $dx, dy, dz, \ldots$ ändert; so wird der gefundene Werth von $f(x, y, z, \ldots)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum sein.

Anmerk. Die Natur der Function u kann so beschaffen sein, daß einer unendlichen Menge von Systemen verschiedener Werthe von $x, y, z, \ldots$ gleiche Werthe von u entsprechen, welche aber größer oder kleiner sind, als alle benachbarten Werthe, und wovon jeder folglich eine Art von Maximum oder Minimum ist. Wenn dieser Umstand statt findet für Systeme, in deren Nähe die Functionen u, du stetig bleiben; so leisten diese Systeme zuverlässig den Gleichungen (10) Genüge. Diese Gleichungen können also zu-

wellen eine unendliche Anzahl von Auflösungen gestatten, und dieses ist immer der Fall, wenn sie sich zum Theil aus einander ableiten lassen.

Die Vortheile, welche die Betrachtung der Totaldifferenziale der verschiedenen Ordnungen bei der Bestimmung der Maxima und Minima der Functionen von mehreren Veränderlichen darbieten kann, springen leicht in die Augen. Denn sollen gewisse Werthe der unabhängigen Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ ein Maximum oder Minimum der Function:

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

erzeugen, so ist nach dem eben Gesagten erforderlich und zureichend, daß der correspondirende Werth von:

$$F(\alpha) = f(x + \alpha dx, y + \alpha dy, z + \alpha dz, \ldots)$$

immer für $\alpha = 0$ ein Maximum oder Minimum werde. Nun wird aber $F(\alpha)$ für $\alpha = 0$ in der That ein Maximum oder Minimum, wenn für alle Werthe der Differenziale $dx, dy, dz, \ldots$ die erste der Größen $F'(0), F''(0), F'''(0) \ldots$, welche nicht verschwindet, einem paaren Index entspricht, und beständig dasselbe Zeichen behält (Siehe Vorles. 7). Ferner ist $F(0)$ ein Maximum, wenn die erwähnte Größe stets negativ ist, und ein Minimum, wenn diese Größe immer positiv ist. Wenn die erste der Größen $F'(0), F''(0), F'''(0), \ldots$, welche nicht verschwindet, für alle möglichen Werthe von $dx, dy, dz, \ldots$, oder nur für besondere Werthe dieser Differenziale, einem ungeraden Index entspricht, oder vielmehr auch, wenn diese Größe bald positiv, bald negativ ist; so kann $F(0)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum sein. Berücksichtigt man nun die Gleichungen (5) Vorles. 19, nämlich:

$$F(0) = u,\ F'(0) = du,\ F''(0) = d^2 u,\ \text{etc} \ldots,$$

so ergibt sich aus den eben gemachten Bemerkungen folgender Satz.

Lehrsatz 1. Es sei $u = f(x, y, z, \ldots)$ eine gegebene Function der unabhängigen Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ Um zu entscheiden, ob ein System von Werthen von $x, y, z, \ldots$, welches den Gleichungen (10) Genüge leistet, ein Maximum oder Minimum der Function u zur Folge hat, berechne man die Werthe von d^2u, d^3u, $d^4u, \ldots$, welche diesem Systeme entsprechen, und welches offenbar Polynome sein werden, in denen weiter keine willkührlichen Größen als die Differenziale $dx, dy, dz, \ldots$ vorkommen. Es sei:

$$(12)\quad d^n u = \frac{d^n u}{dx^n} dx^n + \frac{d^n u}{dy^n} dy^n + \ldots + \frac{n}{1} \frac{d^n u}{dx^{n-1} dy} dx^{n-1} dy + \ldots,$$

das erste dieser Polynome, welches nicht verschwindet, wo n eine ganze Zahl bezeichnet, die von den den Differenzialen $dx, dy, dz, \ldots$ beigelegten besondern Wer-

die symbolische Formel:

$$(9)\quad \begin{cases} d[ad_x^l d_y^m d_z^n \ldots u + bd_x^p d_y^q d_z^r \ldots u + \ldots] = \\ (ad_x^l d_y^m d_z^n \ldots + bd_x^p d_y^q d_z^r \ldots + \ldots)(d_x + d_y + d_z + \ldots)u. \end{cases}$$

Da die Bezeichnungen d_x, d_y, d_z,... in der Formel (9) zur Darstellung der Differenziale angewandt worden sind, so hat diese Formel, buchstäblich genommen, keinen Sinn; aber sie wird wieder richtig, so bald man ihren zweiten Theil nach den gewöhnlichen Regeln der algebraischen Multiplication entwickelt, und mit d_x, d_y, d_z... wie mit wirklichen Größen operirt.

Wenn man für den Ausdruck (6) den Ausdruck (8) substituirt, und diesen mehrere Male nach einander differenzirt; so erhält man durch dasselbe Verfahren die symbolischen Werthe der Totaldifferenziale d^2u, d^3u,... nämlich:

$$(d_x + d_y + d_z + \ldots)(d_x + d_y + d_z + \ldots)u,$$
$$(d_x + d_y + d_z + \ldots)(d_x + d_y + d_z + \ldots)(d_x + d_y + d_z + \ldots)u, \text{ etc.} \ldots$$

Verbindet man diese symbolischen Werthe mit dem von du, und schreibt der Kürze wegen:

$$(d_x + d_y + d_z + \ldots)^2 = (d_x + d_y + d_z + \ldots)(d_x + d_y + d_z + \ldots),$$
$$(d_x + d_y + d_z + \ldots)^3 = (d_x + d_y + d_z + \ldots)(d_x + d_y + d_z + \ldots)(d_x + d_y + d_z \ldots), \text{ etc.} \ldots;$$

so bildet man die symbolischen Gleichungen:

$$(10)\quad du = (d_x + d_y + d_z + \ldots)u,\ d^2u = (d_x + d_y + d_z + \ldots)^2 u,$$
$$d^3u = (d_x + d_y + d_z + \ldots)^3 u, \text{ etc.} \ldots,$$

und allgemein, wenn n irgend welche ganze Zahl bezeichnet:

$$(11)\qquad d^n u = (d_x + d_y + d_z + \ldots)^n u.$$

Es sei nun:

$$(12)\qquad s = F(u, v, w, \ldots),$$

wo u, v, w,... Functionen der independenten Veränderlichen x, y, z,... sind; so ist auch:

$$(13)\qquad d^n s = (d_u + d_v + d_w + \ldots)^n s.$$

Der zweite Theil dieser letzten Gleichung läßt sich in dem besondern Falle, wo u bloß als eine Function von x, v bloß als eine Function von y, w bloß als eine Function von z, etc... angesehen wird, leicht entwickeln. Um übrigens von diesem besondern Falle zu dem allgemeinen überzugehen, braucht man offenbar für

$$d_x u,\ d_x^2 u,\ d_x^3 u, \ldots \text{ nur } du,\ d^2u,\ d^3u, \ldots,$$
$$\text{für } d_y v,\ d_y^2 v,\ d_y^3 v \ldots \text{ nur } dv,\ d^2v,\ d^3v, \ldots, \text{ etc.} \ldots$$

zu setzen, d. h. die unten an dem Zeichen d stehenden Buchstaben x, y, z,... wegzulassen. Es wird also in allen Fällen leicht sein, aus der Formel (13) den Werth von $d^n s$ abzuleiten. Um die Begriffe zu fixiren, sei $s = uv$, so findet man, wenn man, wie eben gesagt worden, verfährt:

$$(14)\quad d^n(uv) = u\,d_y^n v + \frac{n}{1} d_x u\, d_y^{n-1} v + \frac{n(n-1)}{1.2} d_x^2 u\, d_y^{n-2} v + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n}{1} d_y v\, d_x^{n-1} u + v\, d_x^n u.$$

$$(15)\quad d^n(uv) = u\,d^n v + \frac{n}{1} du\, d^{n-1} v + \frac{n(n-1)}{1.2} d^2 u\, d^{n-2} v + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n}{1} dv\, d^{n-1} u + v\, d^n u.$$

Die letzte Formel bleibt für alle Werthe von u, v und x, y gültig, und selbst in dem Falle, wo sich u, v auf zwei Functionen von x reduciren.

Beispiel.

$$d^n\left(\frac{e^{ax}}{x}\right) = \frac{a^n e^{ax}}{x}\left(1 - \frac{n}{ax} + \frac{n(n-1)}{a^2x^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{a^3x^3} + \ldots \right.$$

$$\left. \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{a^n x^n}\right) dx^n.$$

Es bezeichne $\Delta_x u$ das Increment, welches eine Function u von $x, y, z, \ldots$ bekommt, wenn man x allein um eine unendlich kleine Größe αdx wachsen läßt; so findet man:

$$(2) \quad \Delta_x u = f(x + \alpha dx, y, z \ldots) - f(x, y, z \ldots,)$$

$$d_x u = \lim \frac{\Delta_x u}{\alpha},$$

$$(3) \qquad \Delta_x d_y u = d_y(u + \Delta_x u) - d_y u = d_y \Delta_x u,$$

und folglich:

$$\frac{\Delta_x d_y u}{\alpha} = \frac{d_y \Delta_x u}{\alpha} = d_y \frac{\Delta_x u}{\alpha}$$

Läßt man nun α gegen die Grenze Null convergiren, und berücksichtigt die zweite der Formeln (2); so erhält man die Gleichung (1). Auf dieselbe Weise würde man darthun, daß $d_x d_z u = d_z d_x u$, $d_y d_z u = d_z d_y u, \ldots$ ist.

Beispiel. Wenn man $u = \text{arc. tang} \frac{x}{y}$ setzt, so erhält man:

$$d_x u = \frac{y}{x^2 + y^2} dx, \qquad d_y u = \frac{-x}{x^2 + y^2} dy,$$

$$d_y d_x u = d_x d_y u = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx\, dy.$$

Wenn die Gleichung (1) einmal bewiesen ist, so folgt daraus, daß es in einem Ausdrucke von der Form $d_x d_y d_z \ldots u$ immer gestattet ist, die Veränderlichen zu vertauschen, auf welche sich zwei nach einander folgende Differenzirungen beziehen. Nun ist aber klar, daß man vermittelst einer oder mehrerer Vertauschungen dieser Art die Ordnung der Differenzirungen auf alle möglichen Weisen verändern kann. Um z. B. aus dem Differenziale $d_x d_y d_z u$ das Differenzial $d_z d_y d_x u$ abzuleiten, braucht man nur den Buchstaben x durch zwei nach einander folgende Vertauschungen an die Stelle von z zu bringen, und dann die Buchstaben y und z zu vertauschen, um den Buchstaben y auf die zweite Stelle zu bringen. Man kann also behaupten, daß ein Differenzial von der Form $d_x d_y d_z \ldots u$ einen von der Ordnung der nach den verschiedenen Veränderlichen verrichteten Differenzirungen unabhängigen Werth hat. Dieser Satz gilt selbst in dem Falle, wo mehrere Differenzirungen sich auf dieselbe Veränderliche beziehen, wie solches bei den Differenzialen $d_x d_y d_x u$, $d_x d_y d_x d_x u$, etc... der Fall ist. Wenn sich in diesem Falle zwei, oder mehrere Differenzirungen auf die Veränderliche x beziehen, so schreibt man der Kürze wegen d_x^2 statt $d_x d_x$, d_x^3 statt $d_x d_x d_x$, etc... Hiernach ist:

$$d_x^2 d_y u = d_x d_y d_x u, \quad d_x^3 d_y d_z u = d_x d_y d_x d_z d_x u$$

$$= d_y d_x^3 d_z u \ldots$$

$d_x^2 d_y^2 u = d_y^2 d_x^2 u$, $d_x d_y^2 d_z^2 u = d_x d_z^2 d_y^2 u = d_y^2 d_x d_z^2 u = \ldots$,
und im Allgemeinen, wenn l, m, n,... irgend welche ganze Zahlen sind:

(4) $d_x^l d_y^m d_z^n \ldots u = d_x^l d_z^n d_y^m \ldots u = d_y^m d_x^l d_z^n \ldots u = \text{etc} \ldots$

Da man, wenn man eine Function mehrerer unabhängiger Veränderlicher x, y, z,... nach einer derselben differenzirt, eine neue, mit dem endlichen constanten Factor dx, oder dy, oder dz,... multiplicirte Function zum Resultate erhält, und da bei dem Differenziren eines Productes die constanten Factoren immer vor das Zeichen d treten; so leuchtet ein, daß, wenn man die Function $u = f(x, y, z, \ldots)$ hinter einander l mal nach x, m mal nach y, n mal nach z,.... differenzirt, das aus diesen verschiedenen Operationen resultirende Differenzial, nämlich $d_x^l d_y^m d_z^n, \ldots u$, das Product einer neuen Function von x, y, z,... mit den Factoren dx, dy, dz,..., den ersten zur lten, den zweiten zur mten, den dritten zur nten,... Potenz erhoben, sein wird. Diese neue Function nennt man die partielle abgeleitete Function der Ordnung $l+m+n+\ldots$ von u. Bezeichnet man sie durch $\varpi(x, y, z, \ldots)$, so hat man:

(5) $d_x^l d_y^m d_z^n \ldots u = \varpi(x, y, z, \ldots) dx^l dy^m dz^n \ldots$

und folglich:

(6) $$\varpi(x, y, z, \ldots) = \frac{d_x^l d_y^m d_z^n \ldots u}{dx^l dy^m dz^n \ldots}.$$

Es ist leicht, die Totaldifferenziale $d^2 u$, $d^3 u$,... durch die partiellen Differenziale der Function u, oder durch ihre partiellen abgeleiteten Functionen auszudrücken. Denn die Formel (12) Vorles. 16 gibt:

$$d^2 u = ddu = d_x du + d_y du + d_z du + \ldots$$
$$= d_x(d_x u + d_y u + d_z u + \ldots) + d_y(d_x u + d_y u + d_z u + \ldots)$$
$$+ d_z(d_x u + d_y u + d_z u + \ldots) + \text{etc} \ldots,$$

und folglich:

(7) $$d^2 u = d_x^2 u + d_y^2 u + d_z^2 u + \ldots 2 d_x d_y u + 2 d_x d_z u + \ldots 2 d_y d_z u + \ldots,$$

oder, was einerlei ist:

(8) $$d^2 u = \frac{d_x^2 u}{dx^2} dx^2 + \frac{d_y^2 u}{dy^2} dy^2 + \frac{d_z^2 u}{dz^2} dz^2 + \ldots$$
$$+ 2 \frac{d_x d_y u}{dx\, dy} dx\, dy + 2 \frac{d_x d_z u}{dx\, dz} dx\, dz + 2 \frac{d_y d_z u}{dy\, dz} dy\, dz + \ldots$$

Mit derselben Leichtigkeit würde man die Werthe von $d^3 u$, $d^4 u$,... finden.

Beispiele.

$$d^2(xyz) = 2(x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy)$$

$$d^3(xyz) = 6\,dx\,dy\,dz$$

$$d^2(x^2 + y^2 + z^2 \ldots) = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2 \ldots),$$

$$d^3(x^3 + y^3 + z^3 + \ldots) = 6(dx^3 + dy^3 + dz^3 \ldots)$$

Der Kürze wegen läßt man gewöhnlich in den Gleichungen (6), (8)... die unten an das Zeichen d geschriebenen Buchstaben weg, und setzt für den zweiten Theil der Gleichung (6) die Bezeichnung:

$$(9) \qquad \frac{d^{l+m+n+\ldots}u}{dx^l\,dy^m\,dz^n\ldots}.$$

Alsdann werden die partiellen abgeleiteten Functionen der zweiten Ordnung durch:

$$\frac{d^2u}{dx^2},\ \frac{d^2u}{dy^2},\ \frac{d^2u}{dz^2},\ \frac{d^2u}{dx\,dy},\ \frac{d^2u}{dx\,dz},\ \frac{d^2u}{dy\,dz},$$

die der dritten Ordnung durch:

$$\frac{d^3u}{dx^3},\ \frac{d^3u}{dx^2\,dy},\ \frac{d^3u}{dx\,dy^2},\ldots,\ \text{etc.}\ldots,$$

ausgedrückt, und der Werth von d^2u verwandelt sich in:

$$(10) \qquad d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2u}{dz^2}dz^2 + \ldots$$

$$+ 2\frac{d^2u}{dx\,dy}dx\,dy + 2\frac{d^2u}{dx\,dz}dx\,dz + \ldots + 2\frac{d^2u}{dy\,dz}dy\,dz\ldots$$

Aber in diesem Werthe dürfen die Differenziale dx, dy, dz,.... nicht weggestrichen werden, weil $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dx\,dy}$ nicht die Quotienten der Division von d^2u durch dx^2 oder durch $dx\,dy$,... bezeichnen.

Wenn man statt der Function $u = f(x, y, z, \ldots)$ die folgende:

$$(11) \qquad s = F(u, v, w, \ldots.)$$

betrachtete, wo u, v, w,... selbst wieder Functionen der unabhängigen Veränderlichen x, y, z,... sind; so ließen sich die Werthe von d^2s, d^3s,... leicht aus den in der Vorlesung 17 aufgestellten Prinzipien herleiten. In der That, differenzirte man die Gleichung (11) mehrere Male nach einander, so würde man finden:

$$
(12)\left\{\begin{aligned}
ds &= \frac{dF(u, v, w, \ldots)}{du}du \\
&+ \frac{dF(u, v, w, \ldots)}{dv}dv + \frac{dF(u, v, w, \ldots)}{dw}dw + \\
d^2s &= \frac{d^2F(u, v, w, \ldots)}{du^2}du^2 + \ldots \\
&+ 2\frac{dF(u, v, w, \ldots)}{du\,dv}du\,dv + \ldots \\
&+ \frac{d^2F(u, v, w, \ldots)}{dv^2}dv^2 + \text{etc}\ldots \\
&\text{etc}\ldots
\end{aligned}\right.
$$

Beispiele.

$$d^n(u+v) = d^n u + d^n v,\quad d^n(u-v) = d^n u - d^n v,$$

$$d^n(u+v\sqrt{-1}) = d^n u + d^n v\sqrt{-1},$$

$$d^n(au+bv+cw+\ldots) = ad^n u + bd^n v + cd^n w + \ldots$$

Unter den Gleichungen, welche man aus den Formeln (12) herleiten kann, muß man die herausheben, welche die Differenziale einer Function s mehrerer Veränderlicher $u, v, w, \ldots$, wovon jede eine lineäre Function anderer unabhängiger Veränderlicher $x, y, z, \ldots$ ist, ausdrücken. Denn es seien $a, b, c, \ldots k$ constante Größen, und

$$(13)\qquad u = ax + by + cz + \ldots + k$$

eine lineäre Function der unabhängigen Veränderlichen $x, y, z, \ldots$, so ist das Differenzial:

$$(14)\qquad du = a\,dx + b\,dy + c\,dz + \ldots$$

auch eine constante Größe, und die Differenziale d^2u, $d^3u, \ldots$ reduciren sich folglich auf Null. Hieraus folgt nun unmittelbar, daß die successiven Differenziale der Functionen:

$$F(u),\ F(u, v),\ F(u, v, w, \ldots),$$

dieselbe Form behalten, wenn man $u, v, w, \ldots$ als unabhängige Veränderliche betrachtet, oder wenn $u, v, w, \ldots$ lineäre Functionen der unabhängigen Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ sind. Sonach findet man in beiden Fällen für $s = F(u)$:

$$(15)\quad ds = F'(u)du,\ d^2s = F''(u)du^2, \ldots d^n s = F^{(n)}(u)du^n.$$

für $s = F(u, v)$:

$$(16)\ d^n s = \frac{d^n F(u, v)}{du^n} du^n + \frac{n}{1} \frac{d^n F(u, v)}{du^{n-1} dv} du^{n-1} dv + \ldots$$

$$+ \frac{n}{1} \frac{d^n F(u, v)}{du\, dv^{n-1}} du\, dv^{n-1} + \frac{d^n F(u, v)}{dv^n} dv^n;$$

für $s = F(u) . F(v)$;

$$(17)\ d^n s = F^{(n)}(u) F(v) du^n + \frac{n}{1} F^{(n-1)}(u) F'(v) du^{n-1} dv + \ldots$$

$$\frac{n}{1} F'(u) F^{(n-1)}(v) du\, dv^{n-1} + F(u) F^{(n)}(v) dv^n;$$

etc. . . .

Diese verschiedenen Gleichungen gelten auch dann, wenn die in den linearen Functionen $u, v, w, \ldots$ von $x, y, z, \ldots$ vorkommenden Constanten $a, b, c, \ldots k$, imaginär werden. Es ist z. B. für $s = F(x + y\sqrt{-1})$:

$$(18)\quad ds = F'(x + y\sqrt{-1})(dx + dy\sqrt{-1}), \ldots$$

$$d^n s = F^{(n)}(x + y\sqrt{-1})(dx + dy\sqrt{-1})^n,$$

für $s = F(x - y\sqrt{-1})$:

$$(19)\quad ds = F'(x - y\sqrt{-1})(dx - dy\sqrt{-1}), \ldots$$

$$d^n s = F^{(n)}(x - y\sqrt{-1})(dx - dy\sqrt{-1})^n,$$

und für $s = F(x + y\sqrt{-1}) . F(x - y\sqrt{-1})$:

$$(20)\ d^n s = F^{(n)}(x + y\sqrt{-1}) . F(x - y\sqrt{-1})(dx + dy\sqrt{-1})^n +$$

$$\frac{n}{1} F^{(n-1)}(x + y\sqrt{-1}) F'(x - y\sqrt{-1})(dx + dy\sqrt{-1})^{n-1}(dx - dy\sqrt{-1})$$

$$+ \text{etc} \ldots +$$

$$\frac{n}{1} F(x + y\sqrt{-1}) F^{(n-1)}(x - y\sqrt{-1})(dx + dy\sqrt{-1})(dx - dy\sqrt{-1})^{n-1}$$

$$+ F(x + y\sqrt{-1}) F^{(n)}(x - y\sqrt{-1})(dx - dy\sqrt{-1})^n \ldots$$

Mit der größten Leichtigkeit würde man auch die Differenziale der unentwickelten Functionen mehrerer independent veränderlicher Größen erhalten. Man brauchte nur die Gleichungen, welche diese Functionen bestimmen, ein oder mehrere Male zu differenziren, indem man die Differenziale der unabhängigen Veränderlichen als constant, und die übrigen Differenziale als neue Functionen dieser Veränderlichen betrachtet.

Neunzehnte Vorlesung.

Methoden zur einfachern Bestimmung der Totaldifferenziale mehrerer unabhängiger Veränderlicher. Symbolische Werthe dieser Differenziale.

Es sei

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

wieder eine Function mehrerer unabhängiger Veränderlicher $x, y, z, \ldots$, und wir wollen ihre partiellen abgeleiteten Functionen der ersten Ordnung in Beziehung auf x, auf y, auf $z, \ldots$ durch:

$$\varphi(x, y, z, \ldots), \; \chi(x, y, z, \ldots), \; \psi(x, y, z, \ldots), \text{ etc.} \ldots$$

bezeichnen. Wird wieder, wie in der sechzehnten Vorlesung:

$$(1) \qquad F(\alpha) = f(x + \alpha dx, \; y + \alpha dy, \; z + \alpha dz, \ldots)$$

gesetzt, und werden die beiden Theile der Gleichung (1) in Beziehung auf die Veränderliche α differenzirt; so erhält man:

$$(2) \qquad \begin{aligned} F'(\alpha) = {} & \varphi(x + \alpha dx, \; y + \alpha dy, \; z + \alpha dz, \ldots) dx \\ & + \chi(x + \alpha dx, \; y + \alpha dy, \; z + \alpha dz, \ldots) dy \\ & + \psi(x + \alpha dx, \; y + \alpha dy, \; z + \alpha dz, \ldots) dz + \ldots \end{aligned}$$

Wenn man in dieser Formel $\alpha = 0$ setzt, so erhält man folgende:

$$(3) \qquad \begin{aligned} F'(0) = {} & \varphi(x, y, z, \ldots) dx + \chi(x, y, z, \ldots) dy \\ & + \psi(x, y, z, \ldots) dz + \ldots = du, \end{aligned}$$

welche mit der Gleichung (20) Vorles. 16 übereinstimmt. Ferner folgt offenbar aus der Vergleichung der Gleichungen (1) und (2), daß man, wenn man eine Function der veränderlichen Größen:

$$(4) \qquad x + \alpha dx, \; y + \alpha dy, \; z + \alpha dz, \ldots$$

in Beziehung auf α differenzirt, eine andere, auf eine gewisse Weise mit den Constanten $dx, dy, dz, \ldots$ verbundene Function dieser

Diese letzte Bedingung wird erfüllt, wenn man hat:

$$(11)\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2}\cdot\dfrac{d^2u}{dy^2}-\left(\dfrac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2>0, \text{ und} \\ \left\{\dfrac{d^2u}{dx^2}\cdot\dfrac{d^2u}{dy^2}-\left(\dfrac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2\right\}\left\{\dfrac{d^2u}{dx^2}\cdot\dfrac{d^2u}{dz^2}-\left(\dfrac{d^2u}{dx\,dz}\right)^2\right\} \\ \quad -\left\{\dfrac{d^2u}{dx^2}\cdot\dfrac{d^2u}{dy\,dz}-\dfrac{d^2u}{dx\,dy}\cdot\dfrac{d^2u}{dx\,dz}\right\}^2>0. \end{cases}$$

Anmerk. Es sei $u=f(x, y, z, \ldots)$ eine Function von n unabhängigen Veränderlichen, und wir wollen setzen:

$$(12)\ F(r, s, t, \ldots)=\frac{d^2u}{dx^2}r^2+\frac{d^2u}{dy^2}s^2+\frac{d^2u}{dz^2}t^2+\ldots$$
$$+2\frac{d^2u}{dx\,dy}rs+2\frac{d^2u}{dx\,dz}rt+2\frac{d^2u}{dy\,dz}st+\ldots;$$

so daß:

$$(13)\begin{cases} F(r)=\dfrac{d^2u}{dx^2}r^2+2\dfrac{d^2u}{dx\,dy}r+\dfrac{d^2u}{dy^2} \\ F(r, s)=\dfrac{d^2u}{dx^2}r^2+2\dfrac{d^2u}{dx\,dy}rs+\dfrac{d^2u}{dy^2}s^2 \\ \quad +2\left(\dfrac{d^2u}{dx\,dz}r+\dfrac{d^2u}{dy\,dz}s\right)+\dfrac{d^2u}{dz^2}: \\ \text{etc}\ldots \end{cases}$$

ist.

Ferner sei D_n das Polynom, welches das Product:

$$(14)\qquad \frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{d^2u}{dy^2}\cdot\frac{d^2u}{dz^2}\cdots$$

zum ersten Gliede hat, und welches den gemeinschaftlichen Nenner der aus den n Gleichungen:

$$(15)\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2}dx+\dfrac{d^2u}{dx\,dy}dy+\dfrac{d^2u}{dx\,dz}dz+\ldots=d\left(\dfrac{du}{dx}\right), \\ \dfrac{d^2u}{dx\,dy}dx+\dfrac{d^2u}{dy^2}dy+\dfrac{d^2u}{dy\,dz}dz+\ldots=d\left(\dfrac{du}{dy}\right), \\ \dfrac{d^2u}{dx\,dz}dx+\dfrac{d^2u}{dy\,dz}dy+\dfrac{d^2u}{dz^2}dz+\ldots=d\left(\dfrac{du}{dz}\right). \\ \text{etc}\ldots \end{cases}$$

gezogenen Werthe von dx, dy, dz,... ausdrückt; so daß:

$$
(16)\left\{\begin{aligned}
D_1 &= \frac{d^2 u}{dx^2},\\
D_2 &= \frac{d^2 u}{dx^2}\cdot\frac{d^2 u}{dy^2} - \left(\frac{d^2 u}{dx\,dy}\right)^2,\\
D_3 &= \frac{d^2 u}{dx^2}\cdot\frac{d^2 u}{dy^2}\cdot\frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{d^2 u}{dx^2}\left(\frac{d^2 u}{dy\,dz}\right)^2 - \frac{d^2 u}{dy^2}\left(\frac{d^2 u}{dz\,dx}\right)^2\\
&\quad - \frac{d^2 u}{dz^2}\left(\frac{d^2 u}{dx\,dy}\right)^2 + 2\frac{d^2 u}{dy\,dz}\cdot\frac{d^2 u}{dz\,dx}\cdot\frac{d^2 u}{dx\,dy},\\
&\text{etc}\ldots,
\end{aligned}\right.
$$

ist.

Soll das Zeichen des Totaldifferenzials $d^2 u$, oder der Function $F(r, s, t, \ldots)$ von den, dx, dy, dz... beigelegten Werthen unabhängig bleiben, so brauchen nur die Verhältnisse:

$$
(17)\qquad \frac{D_2}{D_1^2},\ \frac{D_3}{D_1^3},\ \frac{D_4}{D_1^4},\ldots\frac{D_n}{D_1^n}
$$

alle positiv zu sein, d. h. es brauchen unter den Ausdrücken:

$$
(18)\qquad D_1,\ D_2,\ D_3,\ldots.D_n,
$$

die mit geradem Inder nur positiv, und die übrigen von demselben Zeichen als D_1 zu sein. Dieses läßt sich leicht durch folgende Betrachtungen darthun.

Wir wollen zuvörderst annehmen, daß sich die Veränderlichen x, y, z,... auf die beiden x und y reduciren. Wenn alsdann die Größe:

$$
(19)\qquad D_1 = \frac{d^2 u}{dx^2}
$$

nicht verschwindet, so braucht man der Veränderlichen r nur sehr große Zahlenwerthe zu geben, damit die Größe D_1 und die Function:

$$
(20)\quad F(r) = \frac{d^2 u}{dx^2} r^2 + 2\frac{d^2 u}{dx\,dy} r + \frac{d^2 u}{dy^2} = r^2\left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{2}{r}\frac{d^2 u}{dx\,dy} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2 u}{dy^2}\right)
$$

dasselbe Zeichen haben; oder mit andern Worten, damit das Verhältniß:

$$
(21)\qquad \frac{F(r)}{D_1}
$$

positiv sei. Ferner wird dieses Verhältniß, welches sich mit r allmählich ändert, mit r^2 unbestimmt wachsen. Es wird also einen

kleinsten Werth haben, welcher einem endlichen Werthe von r entspricht, und es wird stets positiv sein, wenn dieser kleinste Werth positiv ist. Nun wird aber dieser kleinste Werth nothwendig durch die Gleichung:

$$(22) \qquad \frac{dF(r)}{dr}=0$$

bestimmt, woraus in Verbindung mit der Gleichung (20) folgt:

$$(23) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2u}{dx^2}r+\frac{d^2u}{dx\,dy}=0, \\ &\frac{d^2u}{dx\,dy}r+\frac{d^2u}{dy^2}=F(r); \end{aligned} \right.$$

und folglich:

$$(24) \qquad F(r)=\frac{D_2}{D_1}, \qquad (25) \qquad \frac{F(r)}{D_1}=\frac{D_2}{D_1^2}.$$

Folglich wird das Verhältniß (21) für jedes r positiv bleiben, und die Function F(r) wird beständig dasselbe Zeichen haben als D_1, wenn der erste der Brüche (17) positiv ist, oder, wenn man hat:

$$(26) \qquad D_2>0.$$

Diese letzte Bedingung stimmt mit (7) überein.

Wir wollen zweitens den Fall betrachten, wo die Function u drei unabhängige Veränderliche x, y, z enthält. Wird alsdann D_1 von Null verschieden, und D_2 positiv angenommen; so wird die Function F(r), nach dem eben Gesagten, immer dasselbe Zeichen behalten, als D_1, und dasselbe gilt von der Function:

$$(27) \qquad s^2F\left(\frac{r}{s}\right)=\frac{d^2u}{dx^2}r^2+2\frac{d^2u}{dx\,dy}rs+\frac{d^2u}{dy^2}s^2.$$

Hiernach genügt es offenbar, den beiden Größen r, s, oder nur einer von ihnen, sehr große Zahlenwerthe zu geben, wenn die Größe D_1 und die Function:

$$(28) \qquad F(r,s)=\frac{d^2u}{dx^2}r^2+2\frac{d^2u}{dx\,dy}rs+\frac{d^2u}{dy^2}s^2 +2\left(\frac{d^2u}{dx\,dz}r+\frac{d^2u}{dy\,dz}s\right)+\frac{d^2u}{dz^2}$$

$$=r^2\left\{\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{2}{r}\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}s+\frac{d^2u}{dx\,dz}\right) +\frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2u}{dy^2}s^2+2s\frac{d^2u}{dy\,dz}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)\right\}$$

$$=s^2\left\{\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{2}{s}\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}r+\frac{d^2u}{dy\,dz}\right) +\frac{1}{s^2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}r^2+2r\frac{d^2u}{dx\,dz}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)\right\}$$

einerlei Zeichen haben sollen, oder, wenn das Verhältniß:

$$(29)\qquad \frac{F(r, s)}{D_1}$$

positiv sein soll. Ferner wird dieses Verhältniß, welches sich mit r und s allmählich ändert, mit r^2 und s^2 unbestimmt wachsen. Folglich wird es einen kleinsten Werth haben können, welcher endlichen Werthen von r und s entspricht, und es wird immer positiv sein, wenn dieser kleinste Werth positiv ist. Nun wird aber dieser kleinste Werth offenbar durch die Gleichungen:

$$(30)\qquad \frac{dF(r, s)}{dr}=0\,,\quad \frac{dF(r, s)}{ds}=0$$

bestimmt, aus welchem in Verbindung mit der Gleichung (28) folgt:

$$(31)\qquad \begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2}r+\frac{d^2u}{dx\,dy}s+\frac{d^2u}{dx\,dz}=0, \\ \frac{d^2u}{dx\,dy}r+\frac{d^2u}{dy^2}s+\frac{d^2u}{dy\,dz}=0, \\ \frac{d^2u}{dx\,dz}r+\frac{d^2u}{dy\,dz}s+\frac{d^2u}{dz^2}=F(r), \end{cases}$$

und mithin:

$$(32)\quad F(r)=\frac{D_3}{D_2},\quad (33)\quad \frac{F(r)}{D_1}=\frac{D_3}{D_1\,D_2}=\frac{\frac{D_3}{D_1^3}}{\frac{D_2}{D_1^2}}$$

Das Verhältniß (29) wird also für alle Werthe von r und s positiv bleiben, und die Function F(r, s) wird stets mit D_1 einerlei Zeichen haben, wenn die beiden ersten der Brüche (17), nämlich:

$$\frac{D_2}{D_1^2},\ \frac{D_3}{D_1^3}$$

positiv sind, oder was einerlei ist, wenn

$$(34)\qquad D_2>0,\ D_1\,D_3>0$$

ist. Man kann sich übrigens leicht überzeugen, daß die Bedingungen (34) mit (11) übereinstimmen.

Wenn man diese Betrachtungen und Rechnungen auf den Fall erstreckt, wo die Function u, vier, fünf, sechs... unabhängige Veränderliche enthält; so kann man allgemein beweisen: 1) daß die Maxima und Minima der Functionen:

$$(35)\qquad F(r),\ F(r, s),\ F(r, s, t), \ldots F(r, s, t, \ldots)$$

den verschiedenen Gliedern der Reihe:

$$(36)\qquad \frac{D_2}{D_1},\ \frac{D_3}{D_2},\ \frac{D_4}{D_3},\ldots\frac{D_n}{D_{n-1}},$$

gleich sind; 2) daß, wenn diese verschiedenen Glieder Größen von demselben Zeichen sind als D_1, ein Gleiches auch von den Ausdrücken (35) gilt. Damit überdies D_1 und die Ausdrücke (36) einerlei Zeichen bekommen, genügt es offenbar, daß die Verhältnisse (17) alle positiv sind.

Aufgabe 2. Wenn zwei ganze Functionen der Veränderlichen r, s, t... gegeben sind, die Bedingungen zu finden, welche erfüllt werden müssen, damit die zweite Function jedesmal ein bestimmtes Zeichen behält, wenn die erste verschwindet.

Auflösung. Es sei $F(r, s, t\ldots)$ die erste und $R = \mathfrak{F}(r, s, t\ldots)$ die zweite Function. Man eliminire r zwischen den beiden Gleichungen $F(r, s, t,\ldots)=0$ und $R=\mathfrak{F}(r, s, t,\ldots)$, so wird die resultirende Gleichung, wenn sie nach R aufgelöst wird, für diese Größe jedesmal einen Werth von dem angenommenen Zeichen geben müssen, wenn man den Veränderlichen s, t,... reelle Werthe beilegt, welchen ein reeller Werth der Veränderlichen r entspricht.

Zwei und zwanzigste Vorlesung.

Gebrauch der unbestimmten Factoren bei der Bestimmung der Maxima und Minima.

Es sei

(1) $$u = f(x, y, z, \ldots)$$

eine Function von n Veränderlichen x, y, z,... Aber statt, wie in der zwanzigsten Vorlesung, diese Veränderlichen als von einander unabhängig zu betrachten, sollen sie durch m Gleichungen von der Form:

(2) $$v = 0, \; w = 0, \; \text{etc.} \ldots$$

verbunden sein.

Um die Maxima und Minima der Function u nach der angegebenen Methode zu bestimmen, müßte man vermittelst der Gleichungen (2) zuerst m verschiedene Veränderliche eliminiren. Nach dieser Elimination müßten die übrigen n — m Veränderlichen als independent angesehen werden, und man müßte die Systeme von Werthen dieser Veränderlichen suchen, welche die Function u, oder du discontinuirlich machten, oder auch die, welche der Gleichung:

(3) $$du = 0$$

für alle Werthe der Differenziale dieser übrigbleibenden Veränderlichen Genüge leisteten.

Nun kann aber die Bestimmung der Maxima und Minima, welche der Gleichung (3) entsprechen, durch folgende Betrachtungen vereinfacht werden.

Differenzirt man die Function u, indem alle gegebenen Veränderlichen x, y, z,... darin bleiben; so erscheint die Gleichung (3) unter der Form:

(4) $$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \ldots = 0,$$

und enthält die n Differenziale dx, dy, dz,... Aber es ist wohl zu bemerken, daß unter diesen Differenzialen nur die Differenziale der als independent betrachteten n — m Veränderlichen willkührliche Werthe haben können. Die übrigen werden durch die Gleichungen dv = 0,

den verschiedenen Gliedern der Reihe:

$$(36) \qquad \frac{D_2}{D_1}, \frac{D_3}{D_2}, \frac{D_4}{D_3}, \ldots \frac{D_n}{D_{n-1}},$$

gleich sind; 2) daß, wenn diese verschiedenen Glieder Größen von demselben Zeichen sind als D_1, ein Gleiches auch von den Ausdrücken (35) gilt. Damit überdies D_1 und die Ausdrücke (36) einerlei Zeichen bekommen, genügt es offenbar, daß die Verhältnisse (17) alle positiv sind.

Aufgabe 2. Wenn zwei ganze Functionen der Veränderlichen r, s, t... gegeben sind, die Bedingungen zu finden, welche erfüllt werden müssen, damit die zweite Function jedesmal ein bestimmtes Zeichen behält, wenn die erste verschwindet.

Auflösung. Es sei $F(r, s, t\ldots)$ die erste und $R = \mathfrak{F}(r, s, t\ldots)$ die zweite Function. Man eliminire r zwischen den beiden Gleichungen $F(r, s, t,\ldots) = 0$ und $R = \mathfrak{F}(r, s, t,\ldots)$, so wird die resultirende Gleichung, wenn sie nach R aufgelös't wird, für diese Größe jedesmal einen Werth von dem angenommenen Zeichen geben müssen, wenn man den Veränderlichen s, t,... reelle Werthe beilegt, welchen ein reeller Werth der Veränderlichen r entspricht.

Zwei und zwanzigste Vorlesung.

Gebrauch der unbestimmten Factoren bei der Bestimmung der Maxima und Minima.

Es sei

$$(1) \qquad u = f(x, y, z, \ldots)$$

eine Function von n Veränderlichen x, y, z,... Aber statt, wie in der zwanzigsten Vorlesung, diese Veränderlichen als von einander unabhängig zu betrachten, sollen sie durch m Gleichungen von der Form:

$$(2) \qquad v = 0, \; w = 0, \text{ etc.} \ldots$$

verbunden sein.

Um die Maxima und Minima der Function u nach der angegebenen Methode zu bestimmen, müßte man vermittelst der Gleichungen (2) zuerst m verschiedene Veränderliche eliminiren. Nach dieser Elimination müßten die übrigen n — m Veränderlichen als independent angesehen werden, und man müßte die Systeme von Werthen dieser Veränderlichen suchen, welche die Function u, oder du discontinuirlich machten, oder auch die, welche der Gleichung:

$$(3) \qquad du = 0$$

für alle Werthe der Differenziale dieser übrigbleibenden Veränderlichen Genüge leisteten.

Nun kann aber die Bestimmung der Maxima und Minima, welche der Gleichung (3) entsprechen, durch folgende Betrachtungen vereinfacht werden.

Differenzirt man die Function u, indem alle gegebenen Veränderlichen x, y, z,... darin bleiben; so erscheint die Gleichung (3) unter der Form:

$$(4) \qquad \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \ldots = 0,$$

und enthält die n Differenziale dx, dy, dz,... Aber es ist wohl zu bemerken, daß unter diesen Differenzialen nur die Differenziale der als independent betrachteten n — m Veränderlichen willkührliche Werthe haben können. Die übrigen werden durch die Gleichungen dv = 0,

$dw=0, \ldots$, oder entwickelt, durch:

$$(5) \quad \frac{dv}{dx}dx+\frac{dv}{dy}dy+\frac{dv}{dz}dz+\ldots=0,$$
$$\frac{dw}{dx}dx+\frac{dw}{dy}dy+\frac{dw}{dz}dz+\ldots=0, \text{ etc} \ldots$$

als Functionen der erstern und der Veränderlichen selbst bestimmt.

Weil nun die Gleichung (4) für alle Werthe der Differenziale der unabhängigen Veränderlichen erfüllt werden muß, so ist klar, daß, wenn man vermittelst der Gleichungen (5) m Differenziale aus dieser Gleichung eliminirt, die Coefficienten der übrigen $n-m$ Differenziale einzeln gleich Null sein müssen. Um aber die Elimination zu verrichten, braucht man nur die mit unbestimmten Factoren $-\lambda$, $-\mu$, etc... multiplicirten Gleichungen (5) zu der Gleichung (4) zu addiren, und diese Factoren so zu wählen, daß in der resultirenden Gleichung die Coefficienten von m successiven Differenzialen verschwinden. Da überdies die resultirende Gleichung von der Form sein wird:

$$(6) \quad \left(\frac{du}{dx}-\lambda\frac{dv}{dx}-\mu\frac{dw}{dx}-\ldots\right)dx$$
$$+\left(\frac{du}{dy}-\lambda\frac{dv}{dy}-\mu\frac{dw}{dy}-\ldots\right)dy+\ldots=0,$$

und da, nachdem man die Coefficienten von m Differenzialen hat verschwinden lassen, die der übrigen Differenziale auch gleich Null gesetzt werden müssen; so darf man schließen, daß die aus einigen der Formeln:

$$(7) \quad \frac{du}{dx}-\lambda\frac{dv}{dx}-\mu\frac{dw}{dx}-\ldots=0,$$
$$\frac{du}{dy}-\lambda\frac{dv}{dy}-\mu\frac{dw}{dy}-\ldots=0, \text{ etc} \ldots$$

abgeleiteten Werthe von $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ allen übrigen genügen müssen. Folglich müssen die Werthe von $x, y, z, \ldots$, welche den Gleichungen (4) und (5) Genüge leisten, auch den Bedingungsgleichungen Genüge leisten, welche durch die Elimination der Unbestimmten $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ zwischen den Gleichungen (7) erhalten werden. Die Anzahl dieser Bedingungsgleichungen ist $=n-m$. Verbindet man sie mit den Gleichungen (2), so erhält man im Ganzen n Gleichungen, aus welchen man für die gegebenen Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ mehrere Systeme von Werthen ableiten kann, unter denen sich nothwendigerweise die befinden, welche, ohne eine der Functionen u, d... discontinuirlich zu machen, Maxima oder Minima der erstern geben.

Es verdient bemerkt zu werden, daß die au. der Elimination

von λ, μ, ν,... zwischen den Gleichungen (7) entspringenden Bedingungsgleichungen nicht geändert würden, wenn man in diesen Gleichungen die Function u gegen eine der Functionen v, w,... vertauschte. Man würde also immer auf dieselben Bedingungsgleichungen kommen, wenn man, statt die Maxima und Minima der Function u zu suchen, indem $v=0$, $w=0$,... gesetzt wird, die Maxima und Minima der Function v suchte, und $u=0$, $w=0$,... setzte, oder die der Function w, indem man $u=0$, $v=0$... setzte, etc... Man könnte sogar für die Functionen u, v, w,... folgende: $u-a$, $v-b$, $w-c$, etc setzen, wobei a, b, c,... willkührliche Constanten bezeichnen.

In dem besondern Falle, wo man die Maxima oder Minima der Function u bestimmen will, und x, y, z,... bloß der einen Gleichung:

$$v=0 \tag{8}$$

Genüge leisten müssen, verwandeln sich die Formeln (7) in:

$$\frac{du}{dx}-\lambda\frac{dv}{dx}=0,\ \frac{du}{dy}-\lambda\frac{dv}{dy}=0,\ \frac{du}{dz}-\lambda\frac{dv}{dz}=0,\ \text{etc}\ldots \tag{9}$$

und hieraus folgt durch Elimination von λ:

$$\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{dv}{dx}\right)}=\frac{\left(\frac{du}{dy}\right)}{\left(\frac{dv}{dy}\right)}=\frac{\left(\frac{du}{dz}\right)}{\left(\frac{dv}{dz}\right)}=\text{etc}\ldots. \tag{10}$$

Diese letzte Gleichung ist dasselbe, als $n-1$ verschiedene Gleichungen, welche in Verbindung mit der Gleichung (8) die gesuchten Werthe von x, y, z,... bestimmen.

Beispiel 1. Man suche das Maximum und Minimum der Function $u=ax+by+cz+\ldots$, wenn a, b, c, d,.. r Constanten bezeichnen und die Veränderlichen x, y, z,... der Gleichung:

$$x^2+y^2+z^2+\ldots=r^2,\ \text{oder}\ x^2+y^2+z^2+\ldots\ldots-r^2=0$$

Genüge leisten müssen.

In dieser Voraussetzung reducirt sich die Formel (10) auf:

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\text{etc}\ldots\ldots, \tag{11}$$

woraus folgt (algebr. Analys. Note II):

$$\frac{ax+by+cz+\ldots}{x^2+y^2+z^2+\ldots}=\pm\frac{\sqrt{(a^2+b^2+c^2+\ldots)}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2+\ldots)}},$$

oder:

$$\frac{u}{r^2}=\pm\frac{\sqrt{(a^2+b^2+c^2+\ldots)}}{r},$$

und folglich:

$$(12) \qquad u = \pm r \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + \ldots)}.$$

Um sich zu überzeugen, daß die beiden durch die Gleichung (12) gegebenen Werthe von u ein Maximum und Minimum sind, braucht man nur zu erwägen, daß immer:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} (ax + by + cz + \ldots)^2 + (bx - ay)^2 + (cx - az)^2 + \ldots \\ + (cy - bz)^2 + \ldots = (a^2 + b^2 + c^2 + \ldots)(x^2 + y^2 + z^2 + \ldots), \end{array} \right.$$

und folglich:

$$u^2 < (a^2 + b^2 + c^2 + \ldots) r^2,$$

wofern die Werthe von x, y, z, ... die Gleichung (11) nicht erfüllen.

Beispiel 2. Es wird das Minimum der Function:

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + \ldots$$

gesucht, wenn a, b, c, .. k constante Größen, und x, y, z... Veränderliche, welche der Gleichung $ax + by + cz + \ldots = k$ genügen müssen, bezeichnen. In dieser Hypothese bekommt man wieder die Formel (11), aus welcher folgt:

$$\frac{k}{u} = \pm \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + \ldots)}}{\sqrt{u}},$$

also:

$$(14) \qquad u = \frac{k^2}{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots}.$$

Sind der Veränderlichen x, y, z, ... nur drei, und bezeichnen sie rechtwinklige Coordinaten; so drückt der durch die Gleichung (14) gegebene Werth von $\sqrt{u}$ offenbar den kürzesten Abstand des Anfangspunctes von einer festen Ebene aus.

Beispiel 3. Man sucht das Maximum der Function:

$$u = x^p y^q z^r \ldots$$

wenn a, b, c, .. k, p, q, r... positive Constanten, und x, y, z... Veränderliche bezeichnen, welche der Gleichung:

$$ax + by + cz + \ldots = k$$

Genüge leisten müssen. Man findet:

$$\frac{du}{u} = p\frac{dx}{x} + q\frac{dy}{y} + r\frac{dz}{z} + \ldots,$$

$$\frac{d^2u}{u} - \left(\frac{du}{u}\right)^2 = -p\left(\frac{dx}{x}\right)^2 - q\left(\frac{dy}{y}\right)^2 - r\left(\frac{dz}{z}\right)^2 - \ldots,$$

und folglich ergibt sich aus der Formel (10):

$$\frac{p}{ax}=\frac{q}{by}=\frac{r}{cz}=\ldots=\frac{p+q+r+\ldots}{k},$$

$$x=\frac{p}{a}\cdot\frac{k}{p+q+r+\ldots},\ y=\frac{q}{b}\cdot\frac{k}{p+q+r+\ldots},\ z=\frac{r}{c}\cdot\frac{k}{p+q+r+\ldots}.$$

Da die vorhergehenden Werthe von $x, y, z, \ldots du$ immer zu Null und d^2u stets negativ machen; so geben sie ein Maximum der Function u.

Beispiel 4. Man sucht die halben Axen einer auf ihren Mittelpunkt bezogenen, und durch die Gleichung:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=K$$

ausgedrückten Ellipse oder Hyperbel. Jede dieser halben Axen ist ein Maximum oder Minimum des vom Anfangspuncte nach der Curve gezogenen, und durch die Formel $r^2=x^2+y^2$ bestimmten Radiusvectors. Da nun

$$dr=\frac{1}{r}(xdx+ydy)$$

ist, so kann dr nur dann verschwinden, wenn man $r=\infty$, oder $xdx+ydy=0$ setzt. Die erste Voraussetzung ist nur bei der Hyperbel zulässig. In der zweiten folgt aus der Gleichung (10):

$$\frac{x}{Ax+By}=\frac{y}{Cy+Bx}=\frac{x^2+y^2}{x(Ax+By)+y(Cy+Bx)}$$

$$=\frac{r^2}{K},\ \frac{K}{r^2}-A=B\frac{y}{x},\ \frac{K}{r^2}-C=B\frac{x}{y},$$

$$\left(\frac{K}{r^2}-A\right)\left(\frac{K}{r^2}-C\right)=B^2. \tag{15}$$

Wir wollen nun bemerken, daß reellen Werthen von r immer positive Werthe von r^2 entsprechen, und daß die Gleichung (15) für r^2 zwei positive Werthe gibt, wenn $AK>0$, $AC-B^2>0$ ist, und einen einzigen, wenn $AC-B^2<0$. In der That, da die Curve im ersten Falle eine Ellipse ist, so hat sie zwei reelle Axen, während sie sich im zweiten Falle in eine Hyperbel verwandelt und nur eine einzige reelle Axe hat.

Drei und zwanzigste Vorlesung.

Entwickelung der Functionen von mehreren veränderlichen Größen, Ausdehnung des Taylorschen Lehrsatzes auf Functionen dieser Art.

Es sei

(1) $$u = f(x, y, z, \ldots)$$

eine Function von mehreren unabhängigen Veränderlichen x, y, z... und wir wollen, wie in der neunzehnten Vorlesung:

(2) $$F(\alpha) = f(x + \alpha dx, \; y + \alpha dy, \; z + \alpha dz, \ldots)$$

setzen; so gibt die Formel (8) in Vorles. 8:

(3) $$F(\alpha) = F(0) + \frac{\alpha}{1} F'(0) + \frac{\alpha^2}{1.2} F''(0) + \ldots$$
$$+ \frac{\alpha^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} F^{(n-1)}(0) + \frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n} F^{(n)}(\theta\alpha),$$

indem θ eine kleinere Zahl als 1 bezeichnet. Ueberdies sind, wie in der Vorles. 19 bereits bemerkt worden:

(4) $$F(\alpha), \; F'(\alpha), \; F''(\alpha), \ldots F^{(n)}(\alpha)$$

Functionen von x, y, z,... und α, welche bloß die veränderlichen Größen:

(5) $$x + \alpha dx, \; y + \alpha dy, \; z + \alpha dz, \ldots$$

enthalten, und welche sich für $\alpha = 0$ auf:

(6) $$F(0) = u, \; F'(0) = du, \; F''(0) = d^2 u, \ldots F^{(n)}(0) = d^n u,$$

reduciren. Um also aus dem Totaldifferenziale $d^n u$ die Werthe von $F^{(n)}(\alpha)$ und $F^{(n)}(\theta\alpha)$ abzuleiten, braucht man in demselben nur für die Veränderlichen x, y, z,... die Ausdrücke (5), oder folgende:

(7) $$x + \theta\alpha dx, \; y + \theta\alpha dy, \; z + \theta\alpha dz, \ldots$$

zu setzen.

Wenn man der Kürze wegen den so erhaltenen Werth von $F^{(n)}(\theta\alpha)$ mit D_n bezeichnet, so gibt die Gleichung (3) in Verbindung mit den Formeln (2) und (6):

$$(8)\ f(x+\alpha dx, y+\alpha dy, z+\alpha dz, \ldots) = u + \frac{\alpha}{1} du + \frac{\alpha^2}{1.2} d^2u + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\alpha^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} d^{n-1}u + \frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n} D_n.$$

Es läßt sich also, wenn man den Veränderlichen x, y, z, ... die Incremente:

$$(9)\qquad \Delta x = \alpha dx,\ \Delta y = \alpha dy,\ \Delta z = \alpha dz, \ldots$$

beilegt, das correspondirende Increment der Function $u = f(x, y, z, \ldots)$, nämlich:

$$(10)\ \Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)$$
$$= f(x+\alpha dx, y+\alpha dz, \ldots) - u$$

vermittelst der Formel:

$$(11)\ \Delta u = \frac{\alpha}{1} du + \frac{\alpha^2}{1.2} d^2u + \ldots$$
$$+ \frac{\alpha^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} d^{n-1}u + \frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n} D_n$$

nach den steigenden Potenzen von α entwickeln.

Setzt man $n=1$, und:

$$(12)\quad \frac{du}{dx} = \varphi(x, y, z, \ldots),\ \frac{du}{dy} = \chi(x, y, z, \ldots),$$
$$\frac{du}{dz} = \psi(x, y, z, \ldots), \text{ etc} \ldots,$$

so findet man:

$$(13)\ du = \varphi(x, y, z, \ldots)dx + \chi(x, y, z \ldots)dy$$
$$+ \psi(x, y, z, \ldots)dz + \text{etc} \ldots$$

und die Formeln (8) und (11) geben:

$$(14)\quad f(x+\alpha dx, y+\alpha dy, z+\alpha dz, \ldots) = u + \alpha D_1,$$

$$(15)\qquad \Delta u = \alpha D_1,$$

wo D_1 das Polynom ausdrückt, in welches sich der zweite Theil der Gleichung (13) verwandelt, wenn man darin $x + \theta\alpha dx$ für x, $y + \theta\alpha dy$ für y, $\theta\alpha dz$ für z, etc... substituirt.

Wenn in der Formel (8) das Product:

$$(16)\qquad \frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n} D_n$$

für wachsende Werthe von n unendlich abnimmt, so folgt aus dieser Formel, wenn $n = \infty$ gesetzt wird:

$$(17)\ f(x+\alpha dx,\ y+\alpha dy,\ z+\alpha dz,\ldots) = u + \frac{\alpha}{1} du + \frac{\alpha^2}{1.2} d^2 u + \text{etc}\ldots$$

Setzt man nun $\alpha = 1$, so reduciren sich die Incremente Δx, Δy, $\Delta z\ldots$ der unabhängigen Veränderlichen auf ihre Differenziale dx, dy, $dz,\ldots$, und können übrigens als beliebige endliche Größen h, k, $l,\ldots$ darstellend, betrachtet werden. Alsdann folgt auch aus den Formeln (8) und (11):

$$(18)\ f(x+dx,\ y+dy,\ z+dz,\ldots) = u + \frac{du}{1} + \frac{d^2 u}{1.2} + \ldots + \frac{d^{n-1}u}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{D_n}{1.2\ldots.n},$$

$$(19)\ \Delta u = \frac{du}{1} + \frac{d^2 u}{1.2} + \frac{d^3 u}{1.2.3} + \ldots + \frac{d^{n-1}u}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{D_n}{1.2.3\ldots n},$$

wo D_n der Ausdruck ist, in welchen sich das Totaldifferenzial $d^n u$ verwandelt, wenn darin $x+\theta dx$, $y+\theta dy$, $z+y dz,\ldots$ für $x, y, z\ldots$ gesetzt wird. Setzt man $n = 1$, so erhält man:

$$\begin{aligned}(20)\ f(x+dx,\ y+dy,\ z+dz,\ldots) &= f(x,\ y,\ z,\ldots) + \\ &\varphi(x+\theta dx,\ y+\theta dy,\ z+\theta dz,\ldots)dx \\ &+ \chi(x+\theta dx,\ y+\theta dy,\ z+\theta dz,\ldots)dy \\ &+ \psi(x+\theta dx,\ y+\theta dy,\ z+\theta dz,\ldots)dz + \text{etc}\ldots\end{aligned}$$

Ferner, wenn für wachsende Werthe von n sich D_n der Null unendlich nähert, so ergeben sich aus den Formeln (18) und (19) folgende:

$$(21)\ f(x+dx,\ y+dy,\ z+dz,\ldots) = u + \frac{du}{1} + \frac{d^2 u}{1.2} + \frac{d^3 u}{1.2.3} + \ldots$$

$$(22)\qquad \Delta u = \frac{du}{1} + \frac{d^2 u}{1.2} + \frac{d^3 u}{1.2.3} + \text{etc}\ldots$$

Die Gleichung (21), und die, welche man daraus herleitet, wenn darin 0 für $x, y, z,\ldots$ und $x, y, z,\ldots$ für $dx, dy, dz,\ldots$ gesetzt wird, geben das Mittel an die Hand, den Taylorschen und Maclaurinschen, oder vielmehr Stirlingschen*), Lehrsatz auf Functionen von mehreren Veränderlichen auszudehnen.

Nehmen wir nun an, daß die Größe α in den Formeln (3) oder (8) unendlich klein werde; so wird dasselbe mit der Differenz:

$$(23)\qquad F^{(n)}(\theta\alpha) - F^{(n)}(0) = D_n - d^n u$$

---

*) Peacock hat bemerkt, daß der dem englischen Mathematiker Maclaurin allgemein zugeschriebene Lehrsatz seit 1717 von seinem Landsmann Stirling in dem Werke: Liniae tertii ordinis Newtonianae gegeben ist.

der Fall sein, uud bezeichnet man diese Differenz durch β, d. h. setzt man:

(24) $$D_n = d^n u + \beta;$$

so folgt aus den Formeln (8), (11):

(25) $$f(x+\alpha dx, y+\alpha dy, z+\alpha dz, \ldots) = u + \frac{\alpha}{1} du + \frac{\alpha^2}{1.2} d^2u + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\alpha^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} d^{n-1}u + \frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n}(d^n u + \beta),$$

(26) $$\Delta u = \frac{\alpha}{1} du + \frac{\alpha^2}{1.2} d^2 u + \ldots$$
$$+ \frac{\alpha^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} d^{n-1}u + \frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n}(d^n u + \beta).$$

Geschieht es, daß die Differenziale:

(27) $$du,\ d^2 u \ldots d^{n-1} u$$

für gewisse Werthe von x, y, z, … alle verschwinden; so gibt die Formel (26) bloß:

(28) $$\Delta u = \frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n}(d^2 u + \beta).$$

Setzt man $n = 1$, so fallen die Gleichungen (26) und (28) mit der folgenden:

(29) $$\Delta u = \alpha(du + \beta)$$

zusammen, und folglich mit der Formel (3) der Vorles. 16. Noch wollen wir bemerken, daß die Theorie der Maxima und Minima für Functionen von mehreren veränderlichen Größen in den Formeln (28) und (29) enthalten ist, und daß der Lehrsatz 1 Vorles. 20 unmittelbar aus der Formel (28) abgeleitet werden könnte.

Anhang.

Auflösung der bestimmten Gleichungen.

Erster Abschnitt.

Methode zur Bestimmung zweier Grenzen jeder reellen Wurzel und zur Unterscheidung der imaginären Wurzeln von den reellen.

§ 1. Die gegebene Gleichung ist:

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + a_3 x^{m-3} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0.$$

Den ersten Theil dieser Gleichung bezeichnen wir durch X oder $f(x)$. Der Exponent m ist eine ganze Zahl. Die Coefficienten a_1, a_2, a_3, a_{m-1}, a_m sind gegebene Zahlen. Es kommt darauf an, zu bestimmen, wie viele reelle Zahlen α, β, γ... es gibt, welche für x in X substituirt, diese Function $f(x)$ auf Null reduciren, und für jede dieser reellen Wurzeln zwei Grenzen anzugeben, zwischen welchen sie allein liegt. Um diese Aufgaben zu lösen, betrachten wir die Functionen $X, X', X'', X''', \ldots X^{(m)}$, wovon jede aus der vorhergehenden abgeleitet wird, wenn man nach x differenzirt und durch dx dividirt. Die Anzahl dieser Functionen ist $= m + 1$, und die Function $X^{(m)}$ enthält kein x mehr, sondern ist eine positive constante Größe. Wir schreiben diese Reihe von Functionen in folgender Ordnung:

$$X^{(m)},\ X^{(m-1)},\ X^{(m-2)}, \ldots X'',\ X',\ X.$$

Gesetzt nun, x bekomme einen bestimmten positiven oder negativen Werth a, und man habe das Zeichen jedes Resultates bemerkt, wenn man diesen Werth in die Reihe der Functionen substituirt; so wird eine Reihe von Zeichen gebildet, wovon das erste, welches $X^{(m)}$ entspricht, immer + ist. Wir nehmen an, daß die substituirte Zahl a von einem negativen Werthe, der eine unendliche Anzahl von Einheiten enthält, und durch $-\frac{1}{0}$ bezeichnet wird, allmählich bis zu einem positiven Werthe $+\frac{1}{0}$, der ebenfalls über jede Grenze hinaus wächst, zunehme, und wollen die Veränderungen untersuchen, welche die Reihe der Zeichen der Resultate erleidet, je größer die

substituirte Zahl a wird. Diese Zeichenreihe hat sehr merkwürdige Eigenschaften, deren aufmerksame Untersuchung zur Bestimmung der Grenzen der Wurzeln führt.

Wenn die substituirte Zahl $a = -\frac{1}{0}$ ist, so reducirt sich jede Function auf ihr erstes Glied. Das Zeichen des Resultates der Substitution von $-\frac{1}{0}$ ist für die erste Function offenbar $+$, für die zweite $-$, für die dritte $+$, und so fort. Wenn die substituirte Zahl $= +\frac{1}{0}$ geworden ist, so kommt in der Zeichenreihe nur $+$ vor. Also folgt in dem ersten Falle, wo $a = -\frac{1}{0}$ ist, auf jedes Zeichen der Reihe ein von ihm verschiedenes. In dieser Reihe kommen also bloß Zeichenwechsel vor, deren Anzahl $= m$ ist, und im zweiten Falle, wo $a = +\frac{1}{0}$ ist, folgt auf jedes Zeichen ein ihm gleiches. Die Reihe enthält also nur Zeichenfolgen. Wir werden sogleich beweisen, daß die Zahl m der Zeichenwechsel, welche in der ersten Reihe statt finden, beständig abnimmt, jemehr die substituirte Zahl a zunimmt, und daß die Reihe jedesmal einen Zeichenwechsel verliert, wenn die substituirte Zahl einer reellen Wurzel gleich wird.

§ 2. Zuvörderst ist klar, daß die Reihe der Zeichen ungeändert bleibt, so lange die substituirte Zahl a nicht eine oder mehrere der Functionen $X^{(m)}, X^{(m-1)}, \ldots X'', X', X$ zu Null macht. Denn der Werth einer Function, wie X oder X' oder X'' etc. kann das Zeichen nicht ändern, wenn er nicht zuvor $=0$ wird. Es ist also zu untersuchen, was in der Reihe der Zeichen geschieht, wenn die substituirte Zahl einen Werth erreicht, welcher eine der Functionen $X^{(m)}, X^{(m-1)}, X^{(m-2)}, \ldots X'', X', X$ auf Null reducirt. Wir wollen zuerst annehmen, daß bloß die letzte Function X oder $f(x)$ allein Null werde; so ist $f(x) = 0$. Die Function $f'(x)$ kann einen positiven oder negativen Werth haben.

Wir betrachten drei successive und einander unendlich nahe liegende Zustände der substituirten Zahl a, nämlich:

$$x = a - da,$$
$$x = a,$$
$$x = a + da,$$

und vergleichen die Resultate der Substitution, nämlich:

$$f(a - da),$$
$$f(a),$$
$$f(a + da).$$

Weil das Glied $f(a)$ verschwindet, so sind diese Resultate:

$$-\,da\,f'(a),$$
$$0,$$
$$+\,da\,f'(a).$$

Schreibt man die Zeichen, die den Reihen, welche durch die Substitutionen $a-da$, a, $a+da$ gebildet werden, auf drei correspondirende Horizontallinien; so unterscheiden sich diese Reihen bloß durch die Schlußzeichen. Denn wir setzen voraus, daß der Werth a von x nur die Function $f(x)$ auf Null reducirt, und man kann a immer um eine so kleine Größe $+da$ oder $-da$ variiren lassen, daß keine der übrigen Functionen durch die Substitutionen $a+da$, $a-da$ verschwindet. Folglich behalten diese andern Functionen dasselbe Zeichen, welches sie für $x=a$ hatten. Ist $+$ das Zeichen von $f'(a)$, so schließen sich die drei Reihen mit:

$$\begin{array}{l} \ldots + - \\ \ldots + 0 \qquad (1) \\ \ldots + + \end{array}$$

d. h., wenn $f'(a)$ positiv ist, so nimmt der Werth von $f(x)$ zu, und ist successive negativ, Null und positiv. Aus dem Schema (1) erhellet, daß der Zeichenwechsel $+-$ eine Zeichenfolge $++$ geworden ist.

Wenn das Zeichen von $f'(a)$ negativ ist, so schließen sich die drei Reihen mit:

$$\begin{array}{l} \ldots - + \\ \ldots - 0 \qquad (2) \\ \ldots - - \end{array}$$

d. h., wenn die abgeleitete Function (Fluxion) $f'(a)$ negativ ist, so nimmt der Werth von $f(x)$ ab; so daß er nacheinander positiv, Null und negativ ist. Das Schema (2) zeigt, daß für den Zeichenwechsel $-+$ eine Folge $--$ an die Stelle getreten ist. Es mag also $f'(a)$ positiv oder negativ sein, immer tritt für einen Zeichenwechsel eine Zeichenfolge an die Stelle. Folglich verliert die Reihe der Zeichen der Resultate, welche man erhält, wenn man für x einen beständig wachsenden Werth a substituirt, jedesmal einen Zeichenwechsel, wenn der substituirte Werth eine reelle Wurzel der gegebenen Gleichung erreicht, und unendlich wenig darüber hinausgeht.

Gesetzt nun, die substituirte Zahl erreichte einen Werth, für welchen eine der mittlern Functionen der Reihe $X^{(m)}$, $X^{(m-1)}$, $X^{(m-2)}, \ldots X''$, X', X Null würde, aber die letzte X nicht. Es sei $X^{(n)}$ oder $f^{(n)}(x)$ die verschwindende Function, so daß $f^{(n)}(a)=0$ ist. n bezeichnet den Inder der Differenzirung, und $n+1$ oder $n-1$ diesen Inder für die vorhergehende und nächstfolgende Function. Man vergleiche, wie vorhin, die Resultate der drei Substitutionen $a-da$, a, $a+da$ in die Reihe der Functionen, und bemerke

Drei und zwanzigste Vorlesung.

Entwickelung der Functionen von mehreren veränderlichen Größen, Ausdehnung des Taylorschen Lehrsatzes auf Functionen dieser Art.

Es sei

$$(1) \qquad u = f(x, y, z, \ldots)$$

eine Function von mehreren unabhängigen Veränderlichen $x, y, z \ldots$ und wir wollen, wie in der neunzehnten Vorlesung:

$$(2) \qquad F(\alpha) = f(x + \alpha dx, y + \alpha dy, z + \alpha dz, \ldots)$$

setzen; so gibt die Formel (8) in Vorles. 8:

$$(3) \quad F(\alpha) = F(0) + \frac{\alpha}{1} F'(0) + \frac{\alpha^2}{1.2} F''(0) + \ldots$$

$$+ \frac{\alpha^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} F^{(n-1)}(0) + \frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n} F^{(n)}(\theta\alpha),$$

indem θ eine kleinere Zahl als 1 bezeichnet. Ueberdies sind, wie in der Vorles. 19 bereits bemerkt worden:

$$(4) \qquad F(\alpha), F'(\alpha), F''(\alpha), \ldots F^{(n)}(\alpha)$$

Functionen von $x, y, z, \ldots$ und α, welche bloß die veränderlichen Größen:

$$(5) \qquad x + \alpha dx, y + \alpha dy, z + \alpha dz, \ldots$$

enthalten, und welche sich für $\alpha = 0$ auf:

$$(6) \quad F(0) = u, F'(0) = du, F''(0) = d^2 u, \ldots F^{(n)}(0) = d^n u,$$

reduciren. Um also aus dem Totaldifferenziale $d^n u$ die Werthe von $F^{(n)}(\alpha)$ und $F^{(n)}(\theta\alpha)$ abzuleiten, braucht man in demselben nur für die Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ die Ausdrücke (5), oder folgende:

$$(7) \qquad x + \theta\alpha dx, y + \theta\alpha dy, z + \theta\alpha dz, \ldots$$

zu setzen.

Wenn man der Kürze wegen den so erhaltenen Werth von $F^{(n)}(\theta\alpha)$ mit D_n bezeichnet, so gibt die Gleichung (8) in Verbindung mit den Formeln (2) und (6):

$$(8)\ f(x+\alpha dx,\ y+\alpha dy,\ z+\alpha dz,\ldots)=u+\frac{\alpha}{1}du+\frac{\alpha^2}{1.2}d^2u+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\alpha^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}d^{n-1}u+\frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n}D_n.$$

Es läßt sich also, wenn man den Veränderlichen x, y, z,... die Incremente:

$$(9)\qquad \Delta x=\alpha dx,\ \Delta y=\alpha dy,\ \Delta z=\alpha dz,\ldots$$

beilegt, das correspondirende Increment der Function $u=f(x, y, z,\ldots)$, nämlich:

$$(10)\ \Delta u=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z,\ldots)-f(x, y, z,\ldots)$$
$$=f(x+\alpha dx,\ y+\alpha dz,\ldots)-u$$

vermittelst der Formel:

$$(11)\ \Delta u=\frac{\alpha}{1}du+\frac{\alpha^2}{1.2}d^2u+\ldots$$
$$+\frac{\alpha^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}d^{n-1}u+\frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n}D_n$$

nach den steigenden Potenzen von α entwickeln.

Setzt man $n=1$, und:

$$(12)\quad \frac{du}{dx}=\varphi(x, y, z,\ldots),\ \frac{du}{dy}=\chi(x, y, z,\ldots),$$
$$\frac{du}{dz}=\psi(x, y, z,\ldots),\ \text{etc}\ldots,$$

so findet man:

$$(13)\ du=\varphi(x, y, z,\ldots)dx+\chi(x, y, z\ldots)dy$$
$$+\psi(x, y, z,\ldots)dz+\text{etc}\ldots$$

und die Formeln (8) und (11) geben:

$$(14)\quad f(x+\alpha dx,\ y+\alpha dy,\ z+\alpha dz,\ldots)=u+\alpha D_1,$$

$$(15)\qquad \Delta u=\alpha D_1,$$

wo D_1 das Polynom ausdrückt, in welches sich der zweite Theil der Gleichung (13) verwandelt, wenn man darin $x+\theta\alpha dx$ für x, $y+\theta\alpha dy$ für y, $\theta\alpha dz$ für z, etc... substituirt.

Wenn in der Formel (8) das Product:

$$(16)\qquad \frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n}D_n$$

für wachsende Werthe von n unendlich abnimmt, so folgt aus dieser Formel, wenn $n = \infty$ gesetzt wird:

$$(17)\ f(x+\alpha dx,\ y+\alpha dy,\ z+\alpha dz,\ldots) = u + \frac{\alpha}{1} du + \frac{\alpha^2}{1.2} d^2u + \text{etc}\ldots$$

Setzt man nun $\alpha = 1$, so reduciren sich die Incremente Δx, Δy, $\Delta z\ldots$ der unabhängigen Veränderlichen auf ihre Differenziale dx, dy, $dz,\ldots$, und können übrigens als beliebige endliche Größen h, k, $l,\ldots$ darstellend, betrachtet werden. Alsdann folgt auch aus den Formeln (8) und (11):

$$(18)\ f(x+dx,\ y+dy,\ z+dz,\ldots) = u + \frac{du}{1} + \frac{d^2u}{1.2} + \ldots + \frac{d^{n-1}u}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{D_n}{1.2.\ldots.n},$$

$$(19)\ \Delta u = \frac{du}{1} + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + \ldots + \frac{d^{n-1}u}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{D_n}{1.2.3\ldots n},$$

wo D_n der Ausdruck ist, in welchen sich das Totaldifferenzial $d^n u$ verwandelt, wenn darin $x+\theta dx$, $y+\theta dy$, $z+\gamma dz,\ldots$ für $x, y, z\ldots$ gesetzt wird. Setzt man $n=1$, so erhält man:

$$\begin{aligned}(20)\ f(x+dx,\ y+dy,\ z+dz,\ldots) = f(x,\ y,\ z,\ldots) + {}\\ \varphi(x+\theta dx,\ y+\theta dy,\ z+\theta dz,\ldots)dx\\ +\chi(x+\theta dx,\ y+\theta dy,\ z+\theta dz,\ldots)dy\\ +\psi(x+\theta dx,\ y+\theta dy,\ z+\theta dz,\ldots)dz + \text{etc}\ldots\end{aligned}$$

Ferner, wenn für wachsende Werthe von n sich D_n der Null unendlich nähert, so ergeben sich aus den Formeln (18) und (19) folgende:

$$(21)\ f(x+dx,\ y+dy,\ z+dz,\ldots) = u + \frac{du}{1} + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + \ldots$$

$$(22)\qquad \Delta u = \frac{du}{1} + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + \text{etc}\ldots$$

Die Gleichung (21), und die, welche man daraus herleitet, wenn darin 0 für $x, y, z,\ldots$ und $x, y, z,\ldots$ für $dx, dy, dz,\ldots$ gesetzt wird, geben das Mittel an die Hand, den Taylorschen und Maclaurinschen, oder vielmehr Stirlingschen*), Lehrsatz auf Functionen von mehreren Veränderlichen auszudehnen.

Nehmen wir nun an, daß die Größe α in den Formeln (3) oder (8) unendlich klein werde; so wird dasselbe mit der Differenz:

$$(23)\qquad F^{(n)}(\theta\alpha) - F^{(n)}(0) = D_n - d^n u$$

*) Peacock hat bemerkt, daß der dem englischen Mathematiker Maclaurin allgemein zugeschriebene Lehrsatz seit 1717 von seinem Landsmann Stirling in dem Werke: Liniae tertii ordinis Newtonianae gegeben ist.

der Fall sein, und bezeichnet man diese Differenz durch β, d. h. setzt man:

(24) $$D_n = d^n u + \beta;$$

so folgt aus den Formeln (8), (11):

(25) $$f(x + \alpha dx, y + \alpha dy, z + \alpha dz, \dots) = u + \frac{\alpha}{1} du + \frac{\alpha^2}{1.2} d^2 u + \dots$$
$$\dots + \frac{\alpha^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} d^{n-1} u + \frac{\alpha^n}{1.2.3\dots n} (d^n u + \beta),$$

(26) $$\Delta u = \frac{\alpha}{1} du + \frac{\alpha^2}{1.2} d^2 u + \dots$$
$$+ \frac{\alpha^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} d^{n-1} u + \frac{\alpha^n}{1.2.3\dots n} (d^n u + \beta).$$

Geschieht es, daß die Differenziale:

(27) $$du,\ d^2 u \dots d^{n-1} u$$

für gewisse Werthe von x, y, z,... alle verschwinden; so gibt die Formel (26) bloß:

(28) $$\Delta u = \frac{\alpha^n}{1.2.3\dots n} (d^2 u + \beta).$$

Setzt man $n = 1$, so fallen die Gleichungen (26) und (28) mit der folgenden:

(29) $$\Delta u = \alpha (du + \beta)$$

zusammen, und folglich mit der Formel (3) der Vorles. 16. Noch wollen wir bemerken, daß die Theorie der Maxima und Minima für Functionen von mehreren veränderlichen Größen in den Formeln (28) und (29) enthalten ist, und daß der Lehrsatz 1 Vorles. 20 unmittelbar aus der Formel (28) abgeleitet werden könnte.

Anhang.

Auflösung
der
bestimmten Gleichungen.

Erster Abschnitt.

Methode zur Bestimmung zweier Grenzen jeder reellen Wurzel und zur Unterscheidung der imaginären Wurzeln von den reellen.

§ 1. Die gegebene Gleichung ist:

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + a\ x^{m-3} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0.$$

Den ersten Theil dieser Gleichung bezeichnen wir durch X oder $f(x)$. Der Exponent m ist eine ganze Zahl. Die Coefficienten a_1, a_2, a_3, a_{m-1}, a_m sind gegebene Zahlen. Es kommt darauf an, zu bestimmen, wie viele reelle Zahlen α, β, γ... es gibt, welche für x in X substituirt, diese Function $f(x)$ auf Null reduciren, und für jede dieser reellen Wurzeln zwei Grenzen anzugeben, zwischen welchen sie allein liegt. Um diese Aufgaben zu lösen, betrachten wir die Functionen X, X', X'', X''', ... $X^{(m)}$, wovon jede aus der vorhergehenden abgeleitet wird, wenn man nach x differenzirt und durch dx dividirt. Die Anzahl dieser Functionen ist $= m + 1$, und die Function $X^{(m)}$ enthält kein x mehr, sondern ist eine positive constante Größe. Wir schreiben diese Reihe von Functionen in folgender Ordnung:

$$X^{(m)},\ X^{(m-1)},\ X^{(m-2)}, \ldots X'',\ X',\ X.$$

Gesetzt nun, x bekomme einen bestimmten positiven oder negativen Werth a, und man habe das Zeichen jedes Resultates bemerkt, wenn man diesen Werth in die Reihe der Functionen substituirt; so wird eine Reihe von Zeichen gebildet, wovon das erste, welches $X^{(m)}$ entspricht, immer + ist. Wir nehmen an, daß die substituirte Zahl a von einem negativen Werthe, der eine unendliche Anzahl von Einheiten enthält, und durch $-\frac{1}{0}$ bezeichnet wird, allmählich bis zu einem positiven Werthe $+\frac{1}{0}$, der ebenfalls über jede Grenze hinaus wächst, zunehme, und wollen die Veränderungen untersuchen, welche die Reihe der Zeichen der Resultate erleidet, je größer die

substituirte Zahl a wird. Diese Zeichenreihe hat sehr merkwürdige Eigenschaften, deren aufmerksame Untersuchung zur Bestimmung der Grenzen der Wurzeln führt.

Wenn die substituirte Zahl $a = -\frac{1}{0}$ ist, so reducirt sich jede Function auf ihr erstes Glied. Das Zeichen des Resultates der Substitution von $-\frac{1}{0}$ ist für die erste Function offenbar $+$, für die zweite $-$, für die dritte $+$, und so fort. Wenn die substituirte Zahl $= +\frac{1}{0}$ geworden ist, so kommt in der Zeichenreihe nur $+$ vor. Also folgt in dem ersten Falle, wo $a = -\frac{1}{0}$ ist, auf jedes Zeichen der Reihe ein von ihm verschiedenes. In dieser Reihe kommen also bloß Zeichenwechsel vor, deren Anzahl $= m$ ist, und im zweiten Falle, wo $a = +\frac{1}{0}$ ist, folgt auf jedes Zeichen ein ihm gleiches. Die Reihe enthält also nur Zeichenfolgen. Wir werden sogleich beweisen, daß die Zahl m der Zeichenwechsel, welche in der ersten Reihe statt finden, beständig abnimmt, jemehr die substituirte Zahl a zunimmt, und daß die Reihe jedesmal einen Zeichenwechsel verliert, wenn die substituirte Zahl einer reellen Wurzel gleich wird.

§ 2. Zuvörderst ist klar, daß die Reihe der Zeichen ungeändert bleibt, so lange die substituirte Zahl a nicht eine oder mehrere der Functionen $X^{(m)}, X^{(m-1)}, \ldots X'', X', X$ zu Null macht. Denn der Werth einer Function, wie X oder X' oder X'' etc. kann das Zeichen nicht ändern, wenn er nicht zuvor $= 0$ wird. Es ist also zu untersuchen, was in der Reihe der Zeichen geschieht, wenn die substituirte Zahl einen Werth erreicht, welcher eine der Functionen $X^{(m)}, X^{(m-1)}, X^{(m-2)}, \ldots X'', X', X$ auf Null reducirt. Wir wollen zuerst annehmen, daß bloß die letzte Function X oder $f(x)$ allein Null werde; so ist $f(x) = 0$. Die Function $f'(x)$ kann einen positiven oder negativen Werth haben.

Wir betrachten drei successive und einander unendlich nahe liegende Zustände der substituirten Zahl a, nämlich:

$$x = a - da,$$
$$x = a,$$
$$x = a + da,$$

und vergleichen die Resultate der Substitution, nämlich:

$$f(a - da),$$
$$f(a),$$
$$f(a + da).$$

Weil das Glied $f(a)$ verschwindet, so sind diese Resultate:

$$-da f'(a),$$
$$0,$$
$$+da f'(a).$$

Schreibt man die Zeichen, die den Reihen, welche durch die Substitutionen $a-da$, a, $a+da$ gebildet werden, auf drei correspondirende Horizontallinien; so unterscheiden sich diese Reihen bloß durch die Schlußzeichen. Denn wir setzen voraus, daß der Werth a von x nur die Function $f(x)$ auf Null reducirt, und man kann a immer um eine so kleine Größe $+da$ oder $-da$ variiren lassen, daß keine der übrigen Functionen durch die Substitutionen $a+da$, $a-da$ verschwindet. Folglich behalten diese andern Functionen dasselbe Zeichen, welches sie für $x=a$ hatten. Ist $+$ das Zeichen von $f'(a)$, so schließen sich die drei Reihen mit:

$$\begin{array}{ll} \ldots + - & \\ \ldots + 0 & \quad (1) \\ \ldots + + & \end{array}$$

d. h., wenn $f'(a)$ positiv ist, so nimmt der Werth von $f(x)$ zu, und ist successive negativ, Null und positiv. Aus dem Schema (1) erhellet, daß der Zeichenwechsel $+-$ eine Zeichenfolge $++$ geworden ist.

Wenn das Zeichen von $f'(a)$ negativ ist, so schließen sich die drei Reihen mit:

$$\begin{array}{ll} \ldots - + & \\ \ldots - 0 & \quad (2) \\ \ldots - - & \end{array}$$

d. h., wenn die abgeleitete Function (Fluxion) $f'(a)$ negativ ist, so nimmt der Werth von $f(x)$ ab; so daß er nacheinander positiv, Null und negativ ist. Das Schema (2) zeigt, daß für den Zeichenwechsel $-+$ eine Folge $--$ an die Stelle getreten ist. Es mag also $f'(a)$ positiv oder negativ sein, immer tritt für einen Zeichenwechsel eine Zeichenfolge an die Stelle. Folglich verliert die Reihe der Zeichen der Resultate, welche man erhält, wenn man für x einen beständig wachsenden Werth a substituirt, jedesmal einen Zeichenwechsel, wenn der substituirte Werth eine reelle Wurzel der gegebenen Gleichung erreicht, und unendlich wenig darüber hinausgeht.

Gesetzt nun, die substituirte Zahl erreichte einen Werth, für welchen eine der mittlern Functionen der Reihe $X^{(m)}$, $X^{(m-1)}$, $X^{(m-2)}, \ldots X''$, X', X Null würde, aber die letzte X nicht. Es sei $X^{(n)}$ oder $f^{(n)}(x)$ die verschwindende Function, so daß $f^{(n)}(a)=0$ ist. n bezeichnet den Index der Differenzirung, und $n+1$ oder $n-1$ diesen Index für die vorhergehende und nächstfolgende Function. Man vergleiche, wie vorhin, die Resultate der drei Substitutionen $a-da$, a, $a+da$ in die Reihe der Functionen, und bemerke

zuerst, daß sich, da da eine unendlich kleine Größe ist, die Reihen der Zeichen nur durch die Zeichen der Resultate unterscheiden, welche von den Substitutionen in $f^{(n)}(x)$ herrühren.

Die drei Resultate sind:

$$f^{(n)}(a - da),$$
$$f^{(n)}(a),$$
$$f^{(n)}(a + da),$$

oder:

$$- da\, f^{(n+1)}(a),$$
$$0,$$
$$+ da\, f^{(n+1)}(a).$$

Nun kann aber das Zeichen von $f^{(n+1)}(a)$, + oder — sein, und dasselbe gilt von $f^{(n+1)}(a)$, welches vier verschiedene Combinationen gibt.

In der ersten ist das Resultat $f^{(n+1)}(a)$ und $f^{(n-1)}(a)$ positiv; man muß also von den Zeichenreihen die drei Stücke:

$$\begin{matrix} + & - & + \\ + & 0 & + \\ + & + & + \end{matrix} \qquad (3)$$

vergleichen.

In der zweiten Combination ist das Zeichen von $f^{(n+1)}(a)$, — und das von $f^{(n-1)}(a)$, +. Die entsprechenden Theile, welche man vergleichen muß, sind folglich:

$$\begin{matrix} - & + & + \\ - & 0 & + \\ - & - & + \end{matrix} \qquad (4)$$

Das Schema (3) zeigt, daß die obere Reihe zwei Zeichenwechsel, nämlich + —, — + verloren hat, an deren Stelle die beiden Folgen + +, + + getreten sind. Dasselbe findet nicht bei dem Schema (4) statt; es zeigt, daß die Reihe keinen Zeichenwechsel verloren hat. Denn für einen Zeichenwechsel — + steht eine Folge — —; aber zu gleicher Zeit ist für die Folge + + die Abwechselung — + an die Stelle getreten.

Wir haben vorausgesetzt, daß die Function $f^{(n-1)}(x)$ das Zeichen + habe. Wäre sie im Gegentheil negativ, wenn man a für x setzt; so bekommt man folgende zwei Schemata:

$$\begin{matrix} + & - & - \\ + & 0 & - \\ + & + & - \end{matrix} \qquad (5)$$

und:

$$\begin{matrix} - & + & - \\ - & 0 & - \\ - & - & - \end{matrix} \qquad (6)$$

Das Schema (5) zeigt, daß die obere Reihe in diesem Falle keine Abwechselung der Zeichen verloren hat. Das Schema (6) entspricht einem andern Falle, wo die Zeichenreihe zwei Abwechselungen $-+$, $+-$ verloren hat, an deren Stelle die Folgen $--$, $--$ stehen.

Aus dieser Untersuchung folgt, daß, wenn die substituirte Zahl a einen Werth erreicht, welcher eine der mittleren Functionen auf Null reducirt, die gegebene Function X aber nicht, die Reihe der Zeichen zugleich zwei Abwechselungen, oder keine verliert. Niemals verliert sie eine Abwechselung, oder bekommt eine mehr.

Wenn die substituirte Zahl eine reelle Wurzel der gegebenen Gleichung erreicht und übergeht, so haben wir gesehen, daß die Reihe nothwendig einen Zeichenwechsel verliert, und es ist eben bewiesen, daß, wenn die durch die Substitution zu Null gemachte Function nicht die letzte X ist, sondern eine mittlere, die Zeichenreihe zugleich zwei Zeichenwechsel oder keinen verliert. Wenn also die substituirte Zahl a allmählich von $-\frac{1}{0}$ bis $+\frac{1}{0}$ wächst, so verliert die Reihe der Zeichen wenigstens so viele Zeichenwechsel, als die gegebene Gleichung reelle Wurzeln hat. Die Zahl der Zeichenwechsel der Reihe kann niemals größer werden; sie nimmt nothwendig um eine Einheit ab, wenn die letzte Function X allein verschwindet, und sie kann entweder um zwei Einheiten abnehmen, oder ungeändert bleiben, wenn bloß eine der mittleren Functionen verschwindet.

§ 3. Bisher haben wir angenommen, daß nur eine der Functionen, welche die Reihe bilden, durch die Substitution von a verschwindet, und dieses ist im Allgemeinen der Fall. Das Gegentheil kann nur zufällig geschehen, wenn zwischen den Coefficienten der gegebenen Gleichung gewisse Relationen statt finden. Eine unendlich kleine Veränderung in dem Werthe der Coefficienten würde diese Beziehung aufheben, und ein und derselbe Werth von x würde nicht mehr zwei oder mehrere Functionen zugleich verschwinden machen. Bei Untersuchungen dieser Art kann man daher immer von diesen besondern Fällen abstrahiren; aber sie müssen hier besonders betrachtet werden, weil es darauf ankommt, den strengen Beweis eines Fundamentalsatzes zu geben.

Wir wollen also annehmen, daß derselbe, statt x in die Reihe der Functionen substituirte Werth a mehrere auf einander folgende Functionen zu Null mache, und wie vorhin, die drei Resultate der Substitutionen $a-da$, a, $a+da$ vergleichen. Es sei $f^{(n)}(x)$ die Function, welche verschwindet, wenn man a statt x substituirt, und wir wollen annehmen, daß mehrere folgende Functionen $f^{(n-1)}(x)$, $f^{(n-2)}(x)$, etc durch dieselbe Substitution verschwinden. Es sei i die Anzahl der auf einander folgenden verschwindenden Functionen $f^{(n)}(a)$, $f^{(n-1)}(a)$, $f^{(n-2)}(a)$, $f^{(n-3)}(a)$, etc. Die vorhergehende Function $f^{(n+1)}(a)$ ist nicht Null; sie hat das Zeichen $+$ oder $-$. Dasselbe gilt von der auf die letzte verschwindende Function folgende $f^{(n-i)}(a)$. Es kommt darauf an, die mittlere Reihe, welche

durch die Substitution von a erhalten wird, mit der untern Reihe, welche gebildet wird, wenn man a + da substituirt, und mit der obern Reihe, welche a — da entspricht, zu vergleichen. Zuerst werden nur die Theile dieser Reihen betrachtet, welche sich auf die verschwindenden Functionen und die ihnen vorangehende Function beziehen. Man hat:

$$f^{(n)}(a+da)=f^{(n)}(a)+da\,f^{(n+1)}(a),$$

oder nur:

$$f^{(n)}(a+da)=da\,f^{(n+1)}(a),$$

weil nach der Voraussetzung $f^{(n)}(a)=0$ ist;

$$f^{(n-1)}(a+da)=f^{(n-1)}(a)+da\,f^{(n)}(a)+\frac{da^2}{2}f^{(n+1)}(a)$$
$$=\frac{da^2}{2}f^{(n+1)}(a),$$

weil $f^{(n-1)}(a)$ und $f^{(n)}(a)$ Null werden.

Es ist allgemein:

$$f^{(n)}(a+da)=da\,f^{(n+1)}(a),$$
$$f^{(n-1)}(a+da)=\frac{da^2}{2}f^{(n+1)}(a),$$
$$f^{(n-2)}(a+da)=\frac{da^3}{2.3}f^{(n+1)}(a),$$
$$f^{(n-3)}(a+da)=\frac{da^4}{2.3.4}f^{(n+1)}(a),$$
etc.

und folglich:

$$f^{(n)}(a-da)=-da\,f^{(n+1)}(a),$$
$$f^{(n-1)}(a-da)=\frac{da^2}{2}f^{(n+1)}(a),$$
$$f^{(n-2)}(a-da)=-\frac{da^3}{2.3}f^{(n+1)}(a),$$
$$f^{(n-3)}(a-da)=\frac{da^4}{2.3.4}f^{(n+1)}(a),$$
etc.

Bezeichnet man den Theil der mittlern Reihe, welchen die Functionen:

$f^{(n-1)}(x)$, $f^{(n)}(x)$, $f^{(n-1)}(x)$, $f^{(n-2)}(x)$, $f^{(n-3)}(x)$, $f^{(n-4)}(x)$, etc.

für $x=a$ geben, durch:

$f^{(n+1)}(a)$, 0, 0, 0, 0, 0, etc;

so findet man die Zeichen des der untern Reihe, welche die Sub-

stitution $a+da$ gibt, entsprechenden Theiles, und die Zeichen des Theiles, welcher der durch die Substitution $a-da$ gegebenen obern Reihe entspricht, nach folgender Regel:

Um die untere Zeichenreihe zu bilden, muß man unter jede 0 der mittlern Reihe das Zeichen von $f^{(n+1)}(a)$ setzen, und um die obere Reihe zu bilden, muß man über die erste 0 zur Linken das entgegengesetzte Zeichen von $f^{(n+1)}(a)$ schreiben, über die folgende Null das Zeichen von $f^{(n+1)}(a)$, und so fortfahren, über die folgenden Nullen der mittlern Reihe abwechselnd das entgegengesetzte Zeichen von $f^{(n+1)}(a)$ und das Zeichen von $f^{(n+1)}(a)$ zu schreiben.

Hiernach ist klar, daß, wenn man bei der Bildung der Zeichenreihen von der Linken zur Rechten fortgeht, durch die Anwendung der vorhergehenden Regel in die obere Reihe Zeichenwechsel eingeführt werden, welche in der untern Reihe eben so viele Folgen werden. Ist die Anzahl der verschwindenden Functionen $=i$, so findet man, daß die obere Reihe eine gleiche Anzahl von Zeichenwechseln enthält, welche in der untern Reihe durch eben so viele Folgen ersetzt sind. Auch ist zu bemerken, daß in diesen beiden Reihen die Zeichen abwechselnd verschieden und gleich sind. Verschieden sind sie für die Functionen, deren Rang durch $f^{(n)}$, $f^{(n-2)}$, $f^{(n-4)}$, $f^{(n-6)}$ etc. und gleich für die Functionen, deren Rang durch $f^{(n-1)}$, $f^{(n-3)}$, $f^{(n-5)}$, etc. angedeutet wird. Endlich folgt auf die zu Null werdenden Functionen, deren Anzahl $=i$ ist, eine nicht verschwindende Function $f^{(n-i)}(x)$, für welche die Substitution $x=a$ dasselbe Zeichen gibt in den drei Reihen, und dieses Zeichen kann $+$ oder $-$ sein. Es läßt sich nun leicht finden, wie viele Zeichenwechsel die obere Reihe verloren hat, wofür in der untern Reihe eben so viele Folgen stehen. Denn wenn i eine gerade Zahl ist, so ist das Zeichen der letzten verschwindenden Functiön $f^{(n-i+1)}(a)$ in der untern und obern Reihe dasselbe. Es gibt folglich in beiden Reihen dieselbe Zeichenverbindung mit der nicht verschwindenden Function $f^{(n-i)}(a)$. Folglich hat die obere Reihe i Zeichenwechsel verloren, für welche Folgen stehen.

Wenn aber die Zahl i ungerade ist, so zerfällt dieser Fall in zwei andere. Weil das Zeichen der letzten verschwindenden Function $f^{(n-i+1)}(a)$ für die obere nnd untere Reihe nicht dasselbe ist, so bilden diese verschiedenen Zeichen mit dem beiden Reihen gemeinschaftlichen Zeichen von $f^{(n-i)}(a)$ zwei entgegengesetzte Combinationen. Wenn diejenige dieser Combinationen, welche sich in der obern Reihe befindet, ein Zeichenwechsel ist; so entspricht derselben in der untern Reihe eine Folge. Mithin ist die Anzahl der Zeichenwechsel, welche die obere Reihe verloren hat, nicht i, sondern $i+1$. Aber, wenn die Zeichenverbindung, welche die obere Reihe schließt, eine Folge der Zeichen ist; so wird sie eine Abwechselung in der untern Reihe. In diesem Falle ist die Zahl der Zeichenwechsel, welche die obere Reihe verloren hat, nicht i, sondern $i-1$.

Aus diesen Bemerkungen folgt, daß, wenn die Zahl der verschwindenden Functionen $=i$ ist, die Zahl der in der obern Reihe verloren gegangenen Zeichenwechsel $=i$ ist, wenn i eine gerade Zahl ist, und wenn i ungerade ist; so verliert die obere Reihe in einem

ersten Falle $i+1$ und in einem zweiten $i-1$ Zeichenwechsel. Bezeichnet man also die Gesammtanzahl der Zeichenwechsel in der obern Reihe durch h und die in der untern Reihe durch k, so sieht man 1) daß die Zahl k niemals größer sein kann, als h; 2) daß die Differenz $h-k=i$ ist, wenn i eine gerade Zahl ist; 3) daß die Differenz $h-k=i+1$ oder $=i-1$ ist, wenn die Anzahl der verschwindenden Functionen ungerade ist. Diese Differenz ist folglich immer eine gerade Zahl.

Wenn der Werth von i nur $=1$ ist, so ist die Differenz $h-k=2$ oder $=0$. Dieses ist der allgemeine Fall, welchen wir zuerst untersucht haben, indem vorausgesetzt wurde, daß nur eine mittlere Function verschwindet. Wenn aber mehrere auf einanderfolgende mittlere Functionen zu gleicher Zeit verschwinden, so ist die Differenz $h-k=2=4=6=$ etc.

Wir haben auch den Fall zu betrachten, wo die aufeinanderfolgenden verschwindenden Functionen in der Reihe der Functionen am Ende zur Rechten liegen; so daß sich der erste Theil X der gegebenen Gleichung mit darunter befindet. Nun folgt aber aus unserm vorhergehenden Beweise, daß die obere Reihe, wenn man die Zahl der am Ende der Reihe verschwindenden Functionen mit j bezeichnet, genau j Zeichenwechsel verliert. Man weiß, daß die Function X in diesem Falle, welches der der gleichen Wurzeln ist, den Factor $(x-a)^j$ enthält. Folglich hat die Zeichenreihe j Zeichenwechsel verloren, wenn die substituirte Zahl dem Werthe a der vielfachen Wurzel gleich geworden ist. Diese Verminderung der Zahl der Zeichenwechsel in der Zeichenreihe findet jedesmal statt, wenn die substituirte Zahl a, indem sie allmählich von $-\frac{1}{0}$ bis $+\frac{1}{0}$ wächst, jede reelle Wurzel erreicht und unendlich wenig überschreitet, und die Reihe verliert daher so viele Zeichenwechsel, als die gegebene Gleichung gleiche oder ungleiche reelle Wurzeln hat.

Endlich kann man annehmen, daß die Substitution derselben Zahl a in verschiedenen Theilen der Reihe mehrere aufeinanderfolgende Functionen verschwinden macht; nämlich i in einem ersten Theile, i' in einem zweiten Theile, etc. und j Functionen am Ende der Reihe, worunter auch die gegebene X ist.

Bezeichnet man die Gesammtzahl der Zeichenwechsel, welche die Reihe enthielt, als die substituirte Zahl um eine unendlich kleine Größe kleiner war als der Werth von a, durch H, und durch K die Zahl der Zeichenwechsel, welche die Reihe behält, wenn der Werth von x um ein unendlich Kleines größer geworden ist als a; so leuchtet ein, daß man, um die Differenz $H-K$ zu finden, nur auf jeden Theil der Reihe, wo sich die verschwindenden Functionen befinden, die eben bewiesenen Folgerungen anzuwenden braucht. Wenn die Zahl i gerade ist, so muß man für diesen Theil der Reihe i Zeichenwechsel rechnen, wo für Folgen an die Stelle treten. Wenn aber die Zahl i ungerade ist, so kann es geschehen, daß die Reihe $i+1$ oder $i-1$ Zeichenwechsel verliert. Dasselbe gilt von den Zahlen i', i''.... Die am Ende verschwindenden j Functionen zeigen

in allen Fällen an, daß die Reihe genau j Zeichenwechsel verloren hat. Man sieht, daß sich der vorhergehende Beweis immer auf die Vergleichung der analytischen Ausdrücke der Resultate, welche man erhält, wenn man a — da, a, a + da in die Reihe der Functionen substituirt, reducirt. Durch diese Vergleichung erhellen alle Folgerungen, welche wir in Beziehung auf die progressive Abnahme der Zahl der Zeichenwechsel der Reihe auseinandergesetzt haben.

§ 6. Dieser Beweis zeigt, wie die Reihe der Resultate der Substitutionen nach und nach die m Zeichenwechsel verliert, welche sie hatte, als der substituirte Werth $= -\frac{1}{0}$ war.

1) Die Zahl der Zeichenwechsel der Reihe nimmt beständig ab. Diese Reihe kann keine neuen Zeichenwechsel bekommen, noch einen der verlornen wieder erhalten.

2) Wenn die Substitution die letzte Function $f(x)$ verschwinden macht, so verliert die Reihe aus diesem Grunde so viele Zeichenwechsel, als die Gleichung $f(x) = 0$ reelle Wurzeln hat, die der substituirten Zahl gleich sind.

3) Wenn die substituirte Zahl eine, oder mehrere der mittleren Functionen zu Null macht, die letzte $f(x)$ aber nicht; so kann es geschehen, daß die Reihe keine Zeichenabwechselung, oder daß sie deren eine gerade Anzahl verliert. Es ist in diesem Falle unmöglich, daß eine ungerade Anzahl von Zeichenabwechselungen verschwinden. Sind demnach alle m Wurzeln der Gleichung reell, so verliert die Reihe genau m Zeichenwechsel, und folglich kann sie in diesem Falle keinen ihrer Zeichenwechsel durch die Substitution eines Werthes verlieren, welcher eine oder mehrere der mittlern Functionen verschwinden macht, ohne dieses bei der letzten $f(x)$ zu thun.

Wenn die Gleichung m — 2 reelle und 2 imaginäre Wurzeln hat, so wird es nur einmal geschehen, daß die Reihe durch die Substitution eines Werthes, welcher eine mittlere Function zu Null macht, ohne die letzte Function $f(x)$ verschwinden zu machen, zwei Zeichenwechsel verliert, und die übrigen m — 2 Zeichenwechsel werden nach und nach verschwinden, wenn die substituirte Zahl jeder der m — 2 reellen Wurzeln gleich wird.

In allen Fällen entspricht jede reelle, gleiche, oder ungleiche Wurzel nothwendig einem verlornen Zeichenwechsel. Folglich ist die Anzahl der Zeichenwechsel, welche verschwinden, ohne daß die letzte Function $f(x)$ Null wird, der Anzahl der imaginären Wurzeln der gegebenen Gleichung gleich.

§ 7. Auf diese Art sind wir zu dem Beweise folgenden Satzes gelangt, welchen wir als eins der Fundamentalelemente der algebraischen Analysis betrachten.

Wenn eine numerische Gleichung $f(x) = 0$ des Grades m gegeben ist, so betrachtet man die Functionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$.... $f^{(m)}(x)$, wovon jede aus der vorhergehenden abgeleitet wird, wenn man nach x differenzirt, und durch dx dividirt. Nachdem man die Reihe dieser Functionen nach folgender Ordnung: $f^{(m)}(x)$, $f^{(m-1)}(x)$,....$f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$ geschrieben hat, substituirt man

statt x einen bestimmten Werth a und bemerkt, wie viele Verbindungen zweier auf einander folgender verschiedener Zeichen, wie $+ -$ oder $- +$ die Reihe der Zeichen der Resultate $f^{(m)}(a)$, $f^{(m-1)}(a)$... $f''(a)$, $f'(a)$, $f(a)$ darbietet. Die Anzahl h dieser, in der durch die Substitution von a gebildeten Reihe gezählten Zeichenwechsel ändert sich, wenn man in dieselben Functionen andere Werthe als a substituirt. Die Vergleichung der Resultate gibt folgende Sätze: 1) Stellt man sich vor, daß die substituirte Größe a allmählich von $-\frac{1}{0}$ bis $+\frac{1}{0}$ wächst, so wird die Zahl der Zeichenwechsel der Reihe desto kleiner, je größer die substituirte Größe wird. Die Reihe der Zeichen, welche m Zeichenwechsel enthält, wenn man $-\frac{1}{0}$ substituirt, verliert nach und nach alle ihre Zeichenwechsel, je größere Werthe man substituirt. Die Zahl h der Zeichenwechsel, welche der Substitution von a entspricht, kann niemals kleiner sein, als die Zahl k der Zeichenabwechselungen, welche der Substitution eines größern Werthes b als a entspricht.

2) Die Reihe verliert jedesmal einen Zeichenwechsel, wenn die substituirte Zahl einer reellen Wurzel der gegebenen Gleichung gleich wird. Es verschwinden also so viele Zeichenwechsel, als die Gleichung reelle, gleiche oder ungleiche Wurzeln hat.

3) So viele Paare von imaginären Wurzeln die Gleichung $f(x)=0$ hat, so oft geschieht es, daß die Reihe zwei Zeichenwechsel verliert, welche zugleich verschwinden.

§ 8. Dieser Satz zeigt unmittelbar an, wie viele reelle Wurzeln eine gegebene Gleichung $f(x)=0$ zwischen zwei gegebenen Grenzen a und b haben kann. Denn substituirt man die kleinere Grenze a in die Reihe der Functionen, zählt die Anzahl der Zeichenwechsel $= h$ dieser Reihe, substituirt auch die größere Grenze b und zählt die Anzahl k der Zeichenwechsel der Reihe, welche diese Substitution gibt; so zeigt die Differenz $h-k$ an, wie viele reelle Wurzeln man zwischen den gegebenen Grenzen suchen muß. Wir haben bewiesen, daß diese Differenz nicht negativ werden kann. Sie kann $=0$ oder $=1, 2, 3, 4$ etc. sein.

Wenn sie $=0$ ist, so kann die Gleichung $X=0$ zwischen den Grenzen a und b durchaus keine reelle Wurzel haben. Denn wenn es in diesem Intervalle eine reelle Wurzel α gäbe, welche die Function X zu Null machte, so müßte die statt x substituirte Zahl, indem sie allmählich von dem Werthe a zu dem Werthe b übergeht, nothwendig wenigstens einen Zeichenwechsel verschwinden machen, und da die einmal verschwundenen Zeichenwechsel nicht wieder hergestellt werden können, so würde die durch die Substitution von b gegebene Reihe weniger Zeichenwechsel haben, als die von der Substitution von a herrührende Reihe, welches gegen die Voraussetzung ist.

Wenn die Differenz $h-k=1$ ist, so hat die Gleichung eine reelle Wurzel zwischen a und b. Denn ein einziger Zeichenwechsel kann nur durch die Substitution eines Werthes verschwinden, welcher die Function X zu Null macht. Und zwischen denselben Grenzen

a und b kann es nicht mehr als eine Wurzel geben, denn sonst würde die Zeichenreihe mehr als einen Zeichenwechsel verloren haben.

Wenn die Differenz $h - k = 2$ ist, so kann die Gleichung $X = 0$ zwischen den Grenzen a und b zwei reelle Wurzeln haben; aber es kann auch geschehen, daß sie in diesem Intervalle keine reelle Wurzel hat. Dieses würde statt finden, wenn es eine gewisse Zahl μ, größer als a und kleiner als b, gäbe, welche in die Reihe der Functionen substituirt, zugleich zwei Zeichenwechsel verschwinden machte, ohne die Function X zu Null zu machen. Es ist übrigens gewiß, daß die Gleichung in diesem Falle nicht mehr als zwei reelle Wurzeln haben kann zwischen den Grenzen a und b; denn wenn dieses der Fall wäre, so würde die Reihe mehr als zwei Zeichenwechsel verloren haben, was gegen die Voraussetzung ist.

In allen Fällen kann die Gleichung $X = 0$ zwischen den Grenzen a und b nicht mehr reelle Wurzeln haben, als die Differenz $h - k$ der Zahlen der Zeichenwechsel in den beiden Reihen (a) und (b) Einheiten hat. Durch (a) oder (b) wollen wir die Reihen der Resultate der Substitutionen von a oder b bezeichnen.

Wenn der Rest $h - k$ eine ungerade Zahl ist, so liegt wenigstens eine reelle Wurzel zwischen den Grenzen a und b.

Ist der Rest $h - k$ eine gerade Zahl, so kann es geschehen, daß die Gleichung $X = 0$ zwischen den Grenzen a und b keine reelle Wurzeln hat. Im Allgemeinen, wenn die Anzahl der zwischen a und b liegenden reellen Wurzeln nicht $= h - k$ ist, so kann sie nur um eine gerade Zahl Δ davon verschieden sein; und in diesem Falle hat die Gleichung $X = 0$ wenigstens so viele imaginäre Wurzeln, als die Differenz Δ Einheiten hat.

Der unter dem Namen der Descartesschen Regel bekannte Lehrsatz, dessen allgemeine Bedeutung seit langer Zeit fixirt ist, ist eine Folgerung aus dem vorhergehenden Satze. Man braucht nur die Größen $-\frac{1}{0}$ und 0, oder 0 und $+\frac{1}{0}$ für die beiden Grenzen a und b zu wählen. Denn substituirt man den Werth 0 für x in die Functionen $X^{(m)}, X^{(m-1)} \ldots X'', X', X$, so sind die Zeichen der Reihe der Resultate offenbar dieselben, als die der Coefficienten $1, a_1, a_2, a_3, \ldots a_m$ der gegebenen Gleichung. Um also vermittelst des vorhergehenden Satzes zu bestimmen, wie viele reelle Wurzeln zwischen $-\frac{1}{0}$ und 0, oder zwischen 0 und $+\frac{1}{0}$ liegen können, muß man bemerken, wie viele Zeichenwechsel die Zeichenreihe der Coefficienten, d. h. die, welche die Substitution von 0 in die Reihe der Functionen gibt, enthält, um sie mit den Reihen zu vergleichen, welche die Substitutionen von $-\frac{1}{0}$ und $+\frac{1}{0}$ geben. Nun enthält aber die Reihe $\left(-\frac{1}{0}\right)$, m Zeichenwechsel, und die Reihe $\left(+\frac{1}{0}\right)$ enthält keinen. Folglich kann die gegebene Gleichung nicht mehr negative reelle Wurzeln haben, als Zeichenfolgen in der Reihe der

Coefficienten vorkommen, und diese Gleichung kann nicht mehr reelle, positive Wurzeln haben, als die Reihe der Coefficienten Zeichenwechsel hat.

§ 10. Die Anwendung des allgemeinen Satzes gibt die Grenzen deutlich zu erkennen, zwischen welchen man die Wurzeln suchen muß. Wenn zwei Grenzen a und b so beschaffen sind, daß die Reihen (a) und (b) dieselbe Anzahl von Zeichenwechseln haben; so kann zwischen diesen Grenzen durchaus keine Wurzel liegen. Folglich würde jede Auflösungsmethode, welche dahin führte, statt x Zahlen zu substituiren, welche zwischen solchen Grenzen liegen, ebendeswegen sehr unvollkommen sein, weil sie sehr viele unnütze Operationen forderte. Es leuchtet ein, daß man nur in einigen Intervallen Wurzeln suchen muß, nämlich in denen, wo sie dem vorhergehenden Lehrsatze gemäß existiren können.

Ehe wir zu den Anwendungen dieses Lehrsatzes fortschreiten, müssen wir bei einer wichtigen Bemerkung hinsichtlich der Substitutionen, welche eine oder mehrere mittlere Functionen zu Null machen, verweilen.

§ 11. Hat man zwei Reihen von Resultaten gefunden, wenn man die gegebenen Grenzen a und b in die Functionen $f^{(m)}(x)$, $f^{(m-1)}(x)$,... ...$f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$ substituirt; so geschieht es häufig, daß eins, oder mehrere dieser Resultate Null sind. Es kommt darauf an, zu wissen, welche Zeichen man den verschwindenden Größen beilegen, und wie die Anzahl der Zeichenwechsel bestimmt werden muß.

Wir betrachten in diesem Falle zwei von der substituirten Zahl a unendlich wenig verschiedene Werthe, welche durch $a - da$, $a + da$, oder $<a$, $>a$ bezeichnet werden. Jeder dieser Werthe wird nun das Zeichen + oder − geben und nicht ein Resultat $=0$.

Ist z. B. die durch die Substitution von a erhaltene Reihe:

$$+ + 0\,0\,0\,0 - 0\,0\,0 - + 0 + 0\,0\,0\,0\,0 -,$$

so wird man für die Reihe, welche die Substitution von der durch $>a$ bezeichneten Größe gibt, finden:

$$+ + + + + + - - - - - + + + + + + + + -.$$

Um diese zweite Reihe zu bilden, geht man in der ersten Reihe von der Linken zur Rechten, und findet man in derselben ein Zeichen, welches nicht Null ist, so schreibt man dieses Zeichen darunter in die zweite Reihe. Kommt man aber in der ersten Reihe auf ein Zeichen 0, so setzt man dafür in die zweite Reihe ein Zeichen, welches dem gleich ist, was man so eben in diese zweite Reihe zur Linken geschrieben hatte.

Um die Reihe zu bilden, welche der Größe $<a$ entspricht, geht man auch in der ersten Reihe von der Linken zur Rechten, und wenn man in dieser durch die Substitution von a gegebenen Reihe ein Zeichen findet, welches nicht 0 ist; so wiederholt man dieses Zeichen darüber in der Reihe $(<a)$. Wenn man aber in der gegebenen Reihe (a) auf ein Zeichen 0 kommt, so setzt man dafür in

der obern Reihe ($<$ a) ein entgegengesetztes Zeichen von dem, was man eben in dieser Reihe zur Linken geschrieben hatte.

In § 3 haben wir diese beiden Regeln bewiesen. Wenn man die drei Reihen des angeführten Beispiels zusammenstellt, so erhält man folgende Uebersicht:

($<$a) + − + − + − + − + − + − + − + − + − −

(a) + 0 0 0 0 − 0 0 0 − + 0 + 0 0 0 0 0 −

($>$a) + + + + + − − − − − + + + + + + + + −

Nachdem auf diese Weise die Reihe (a) durch zwei andere Reihen ($<$a), ($>$a) ersetzt ist, bedient man sich der Reihe ($>$a), um die Grenze a mit einer größern Grenze b zu vergleichen. Muß man die Grenze a mit einer kleinern Grenze b′ als a vergleichen, so nimmt man die Reihe ($<$a) für die Reihe (a). Diese Regel des doppelten Zeichens wendet man jedesmal an, wenn die Substitution irgend einer Grenze eine oder mehrere mittlere Functionen zu Null macht, so daß die verglichenen Reihen in keinem Falle das Zeichen 0 enthalten.

In dem vorhergehenden Beispiele hat die untere Reihe 14 Zeichenwechsel weniger als die obere. Die Gleichung $f(x) = 0$ würde also aus diesem Grunde allein 14 imaginäre Wurzeln haben.

§ 12. Die bisher bewiesenen Sätze geben ein leichtes Mittel an die Hand, die Intervalle zu unterscheiden, in welchen die Wurzeln allein gesucht werden müssen. Wir wollen zur Anwendung dieser Lehrsätze verschiedene Beispiele anführen; das erste sei die Gleichung:

$$x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101 = 0.$$

Für die Reihe der Functionen hat man:

$$\begin{aligned}
&X \;\ldots\; x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101,\\
&X' \;\ldots\; 5x^4 - 12x^3 - 72x^2 + 190x - 46,\\
&X'' \;\ldots\; 20x^3 - 36x^2 - 144x + 190,\\
&X''' \;\ldots\; 60x^2 - 72x - 144,\\
&X^{IV} \;\ldots\; 120x - 72,\\
&X^{V} \;\ldots\; 120.
\end{aligned}$$

Wenn man statt x die Zahlen -10, -1, 0, 1, 10, ... substituirt, und bemerkt die Zeichen der Functionen:

$$X^{V}\; X^{IV}\; X'''\; X''\; X'\; X,$$

so findet man:

(−10)..... + − + − + −

(−1) ..... + − + − + +

(0) ..... + — — + — —

(1) ..... + + — + + —

(10)..... + + + + + +

Vergleicht man die Zeichenreihen, welche von dem Substitutionen von — 10 und + 10 herrühren, so sieht man, daß die erste Reihe (— 10) fünf Zeichenwechsel und die Reihe (10) keinen hat. Folglich liegen alle Wurzeln der Gleichung zwischen — 10 und + 10. Vergleicht man die beiden Reihen (— 10) und (— 1), so ergibt sich, daß zwischen diesen Grenzen eine reelle Wurzel liegt; denn die zweite Reihe hat nur 4 Zeichenwechsel und die erste hat deren 5. Vergleicht man die beiden Reihen (— 1) und (0) ebenso mit einander, so sieht man, daß zwischen diesen Grenzen eine zweite reelle Wurzel liegt; denn die Zahl der Zeichenwechsel der ersten Reihe übertrifft die der zweiten um eine Einheit. In dem folgenden Intervalle zwischen 0 und 1 liegt keine Wurzel; denn die Reihe (0) hat 3 Zeichenwechsel, und die Reihe (1) hat eben so viele. Was das Intervall zwischen 1 und 10 betrifft, so findet man in der ersten Reihe (1) drei Zeichenwechsel und in der zweiten (10) keinen. Es liegen also zwischen 1 und 10 drei Wurzeln; eine dieser Wurzeln ist reell, und bis jetzt wissen wir nicht, ob die beiden andern auch reell sind, oder ob sie in diesem Zwischenraume fehlen (imaginär sind).

Die Intervalle, in welchen man die Wurzeln allein suchen muß, sind also die von — 10 bis — 1, von — 1 bis 0, und von 1 bis 10. In jedem der beiden ersten liegt eine reelle, ganz von den übrigen gesonderte Wurzel, und in dem dritten liegt auch eine reelle Wurzel; aber es bleibt noch zu bestimmen übrig, ob die beiden andern, in diesem Intervalle angezeigten Wurzeln reell, oder imaginär sind. Diese Aufgabe werden wir bald lösen. Es wäre daher ganz unnütz, die Wurzeln der gegebenen Gleichung in andern Intervallen, als die eben angeführten, zu suchen.

§ 13. Die gegebene Gleichung sei:

$$x^4 - 4x^3 - 3x + 23 = 0,$$

so ist die Reihe der Functionen:

$$\begin{aligned}
X \;&\ldots\; x^4 - 4x^3 - 3x + 23,\\
X' \;&\ldots\; 4x^3 - 12x^2 - 3,\\
X'' \;&\ldots\; 12x^2 - 24x,\\
X''' \;&\ldots\; 24x - 24,\\
X^{IV} \;&\ldots\; 24.
\end{aligned}$$

Substituirt man statt x die Zahlen 0, 1, 10 in die Functionen:

$$X^{IV}\ X'''\ X''\ X'\ X,$$

und bemerkt die Zeichen der Resultate, so findet man:

(	(<0)	.... + − + − +
{	(0)	.... + − 0 − +
(	(>0)	.... + − − − +
(	(<1)	.... + − − − +
{	(1)	.... + 0 − − +
(	(>1)	.... + + − − +
	(10)	.... + + + + +

In diesem Beispiele verschwindet die Function X'' durch die Substitution von 0 statt x. Man muß also die Regel des doppelten Zeichens anwenden. Sie zeigt, daß man in der obern Reihe (<0) das Zeichen + über das Zeichen 0 setzen muß, und in der untern Reihe das Zeichen —. Vergleicht man nun die beiden Reihen (<0) und (>0), so findet man vier Zeichenwechsel in der ersten und nur zwei in der zweiten. Folglich hat die Gleichung in dem unendlich kleinen Zwischenraume von <0 bis >0 zwei imaginäre Wurzeln.

Durch die Substitution der Zahl 1 verschwindet die mittlere Function X''', und wenn man die Regel des doppelten Zeichens wieder anwendet; so sieht man, daß das Zeichen 0 der mittlern Reihe (1) in der obern Reihe (<1) durch — und in der untern Reihe (>1) durch + ersetzt werden muß. Wenn man nun die beiden Reihen (<1) und (>1) vergleicht, so findet man in beiden dieselbe Anzahl von Zeichenabwechselungen. Folglich liegt in dem Intervalle von (<1) bis (>1) keine Wurzel. Diese Substitution von 1, welche eine der mittlern Functionen zu Null macht, läßt die Zahl der Zeichenwechsel ungeändert. Dasselbe ist nicht mit der Substitution von 0 der Fall, welche, da sie zwei Zeichenwechsel verschwinden macht, zeigt, daß die Gleichung in dem Intervalle von <0 bis >0 zwei imaginäre Wurzeln hat.

Um die Reihe der Zeichen, welche die Substitution von 0 gibt, mit der, welche die Substitution von 1 gibt, zu vergleichen, muß man die Reihen (>0) und (<1) vergleichen; um aber die Reihe, welche die Substitution von 1 gibt, mit der, welche die Substitution von 10 gibt, zu vergleichen, muß man die Reihen (>1) und (10) anwenden. Die Vergleichung der Reihen (>0) und (<1) zeigt, daß zwischen 0 und 1 keine Wurzel liegen kann; denn die beiden Reihen haben dieselbe Anzahl von Zeichenabwechselungen. Die Vergleichung der Reihen (>1) und (10) zeigt, daß man zwischen 1 und 10 zwei Wurzeln suchen muß; denn die erste Reihe hat zwei Zeichenwechsel und die zweite hat keinen. Die gegebene Gleichung hat also nur zwei imaginäre Wurzeln, und die beiden andern Wurzeln können nur zwischen 1 und 10 liegen, und es ist noch zu un-

tersuchen, ob sie reell sind, oder ob sie in diesem Intervalle fehlen, welches weiter unten geschehen soll.

§ 14. Die Gleichung:

$$x^3+2x^2-3x+2=0$$

gibt folgende Resultate:

$$X = x^3+2x^2-3x+2,$$
$$X' = 3x^2+4x-3,$$
$$X'' = 6x+4,$$
$$X''' = 6,$$

und:

	X'''	X''	X'	X
(—10).....	+	—	+	—
(—1)	+	—	—	+
(0)	+	+	—	+
(1)	+	+	+	+

Die Vergleichung der Reihen (—10) und (—1) zeigt, daß die Gleichung zwischen —10 und —1 eine Wurzel hat, und daß sie deren zwischen diesen Grenzen nicht mehr haben kann; denn die erste Reihe hat 3 Zeichenwechsel und die zweite hat nur 2.

Auch sieht man, wenn man die Reihen (—1) und (0) vergleicht, daß man zwischen —1 und 0 keine Wurzel suchen muß; denn die beiden Reihen haben dieselbe Anzahl von Zeichenwechseln, nämlich 2.

Was den folgenden Zwischenraum von 0 bis 1 betrifft, so muß man darin zwei Wurzeln suchen, weil die Reihe (0) zwei, und die Reihe (1) keinen Zeichenwechsel hat. Es bleibt noch zu bestimmen übrig, ob diese beiden, zwischen 0 und 1 angedeuteten Wurzeln reell oder ob sie imaginär sind.

§ 15. Ist

$$x^5+x^4+x^2-25x-36=0$$

die gegebene Gleichung, so erhält man folgende Reihe von Functionen:

$$X = x^5+x^4+x^2-25x-36,$$
$$X' = 5x^4+4x^3+2x-25,$$
$$X'' = 20x^3+12x^2+2,$$
$$X''' = 60x^2+24x,$$
$$X^{IV} = 120x+24,$$
$$X^{V} = 120,$$

und substituirt man für x die Zahlen:

$$\begin{array}{lll} -1, & -10, & -\text{ etc.} \\ 0 & & \\ 1, & 10, & \text{etc.} \end{array}$$

so findet man:

	X^{v}	X^{iv}	X'''	X''	X'	X
(−10)	+	−	+	−	+	−
(−1)	+	−	+	−	−	−
(<0)	+	+	−	+	−	−
(0)	+	+	0	+	−	−
(>0)	+	+	+	+	[illegible]	−
(1)	+	+	+	+	−	−
(10)	+	+	+	+	+	+

Aus der Vergleichung dieser Resultate folgt:

1) daß alle Wurzeln zwischen -10 und $+10$ gesucht werden müssen, weil eine der Reihen 5 Zeichenwechsel hat und die andere keinen.

2) daß zwischen -10 und -1 zwei Wurzeln gesucht werden müssen, weil die erste Reihe 5 und die zweite nur 3 Zeichenwechsel hat; aber es bleibt noch zu bestimmen übrig, ob diese beiden Wurzeln wirklich existiren, oder ob sie imaginär sind.

3) daß, da die Reihe (<0) zwei Zeichenwechsel mehr hat, als die Reihe (>0), die Gleichung zwei imaginäre Wurzeln hat.

4) daß zwischen -1 und 0 keine Wurzel liegt, weil die Reihen (−1) und (<0) beide 3 Zeichenwechsel haben.

5) daß zwischen 0 und 1 keine Wurzel liegen kann, weil die Reihen (>0) und (1) beide einen Zeichenwechsel haben.

6) daß die Gleichung zwischen 1 und 10 eine reelle Wurzel hat, weil die zweite Reihe einen Zeichenwechsel weniger hat, als die erste. Diese Wurzel ist ganz abgesondert.

§ 16. Wenn man den Satz am Ende des 11ten § auf binomische Gleichungen von der Form:

$$x^m + a_m = 0,$$

oder auf solche, worin mehrere auf einander folgende Glieder fehlen, wie:

$$x^m + a_1 x^{m-i} + a_m = 0$$

anwendet; so ergibt sich durch die Anwendung der Regel des doppelten Zeichens unmittelbar die Anzahl der imaginären Wurzeln, welche von dem Mangel der Glieder herrühren.

Für binomische Gleichungen gibt die Substitution von $x = 0$

in die Reihe der Functionen:

	$X^{(m)}$	$X^{(m-1)}$	$X^{(m-2)}$	$X^{(m-3)}$	...	X'	X
(<0) ...	$+$	$-$	$+$	$-$	.....	$+$	a_m
(0) ...	$+$	0	0	0	0	$+$	a_m
(>0) ...	$+$	$+$	$+$	$+$	.....	$+$	a_m.

Wenn die Zahl m gerade, und der Coefficient a_m positiv ist, so hat die Reihe (<0) nur Zeichenwechsel, und die Reihe (>0) hat keinen; folglich sind alle m Wurzeln imaginär. Wenn aber die Zahl m gerade und der Coefficient a_m negativ ist, so hat die Gleichung in dem unendlich kleinen Intervalle von <0 bis >0, $m-2$ imaginäre Wurzeln. Sie hat eine reelle Wurzel zwischen $-\frac{1}{0}$ und 0, und eine andere zwischen $+\frac{1}{0}$ und 0.

Wenn der Grad m ungerade ist, so folgt aus der Betrachtung der Zeichenreihen, daß die Gleichung $m-1$ imaginäre Wurzeln hat, und eine einzige reelle, welche das entgegengesetzte Zeichen von a_m hat.

Was die Gleichungen betrifft, in welchen, wie in:

$$x^m + a_i x^{m-i} + a_m = 0$$

mehrere auf einander folgende Glieder fehlen; so ergibt sich durch dieselbe Regel, daß sie wegen dieses Fehlens der Glieder imaginäre Wurzeln haben, deren Anzahl auf folgende Weise bestimmt wird. Wenn in der Gleichung zwischen zwei vorhandenen Gliedern $2n+1$ auf einander folgende Glieder fehlen, so ist, wegen dieses Grundes allein, die Anzahl der imaginären Wurzeln $=2n$, oder $=2n+2$. Nämlich $2n$, wenn die beiden vorhandenen Glieder, zwischen welchen die auf einander folgenden Glieder fehlen, verschiedene Zeichen haben, und $2n+2$, wenn diese beiden Glieder dasselbe Zeichen haben. Fehlen aber in der Gleichung $2n$ auf einander folgende Glieder, so hat sie deswegen allein immer $2n$ imaginäre Wurzeln.

Man sieht z. B. unmittelbar, daß die Gleichung:

$$x^5 + x + 1 = 0$$

4 imaginäre Wurzeln hat, weil zwischen den beiden Gliedern x^5 und x, welche dasselbe Zeichen haben, 3 auf einander folgende Glieder fehlen.

Die eben angeführten Folgerungen lassen sich zu leicht aus dem in § 11. angegebenen Satze herleiten, als daß es nöthig wäre, sie zu entwickeln. Ueberdies sind sie größten Theils bekannt, und lassen sich leicht durch andere Prinzipien beweisen.

§ 17. Wendet man auf die Gleichung:

$$x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$$

dieselbe Analyse an, so findet man:

$$X = x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6,$$
$$X' = 7x^6 - 10x^4 - 9x^2 + 8x - 5,$$
$$X'' = 42x^5 - 40x^3 - 18x + 8,$$
$$X''' = 210x^4 - 120x^2 - 18,$$
$$X^{IV} = 840x^3 - 240x,$$
$$X^{V} = 2520x^2 - 240,$$
$$X^{VI} = 5040x,$$
$$X^{VII} = 5040,$$

und bildet folgendes Schema:

	X^{VII}	X^{VI}	X^{V}	X^{IV}	X'''	X''	X'	X
(—10)....	+	—	+	—	+	—	+	—
(—1)	+	—	+	—	+	+	—	+
(<0)	+	—	—	+	—	+	—	+
(0)	+	0	—	0	—	+	—	+
(>0)	+	+	—	—	—	+	—	+
(1)	+	+	+	+	+	—	—	+
(10)	+	+	+	+	+	+	+	+.

1) Vergleicht man die beiden Reihen (—10) und (—1), so sieht man, daß die zweite nur einen Zeichenwechsel weniger hat, als die erste. Folglich hat die Gleichung eine reelle Wurzel zwischen —10 und —1.

2) Die Substitution von $x = 0$ gibt mehrere Resultate $= 0$; man bildet also die beiden Reihen (<0) und (>0), und wenn man diese beiden Reihen vergleicht, so findet man, daß die eine 6 und die andere 4 Zeichenwechsel hat. Mithin hat die Gleichung 2 imaginäre Wurzeln.

3) Wenn man die Reihen (—1) und (<0) vergleicht, so findet man, daß die Gleichung zwischen —1 und 0 keine Wurzel hat.

4) Werden die Reihen (>0) und (1) verglichen, so ergibt sich, daß zwischen 0 und 1 nicht mehr als 2 reelle Wurzeln liegen können; und es ist noch übrig, zu entscheiden, ob diese Wurzeln wirklich existiren, oder ob sie imaginär sind.

5) Aus der Betrachtung der beiden Reihen (1) und (10) ergibt sich, daß man zwischen den Grenzen 1 und 10 zwei Wurzeln suchen muß.

Die Intervalle, in welchen man die Wurzeln der gegebenen Gleichung nur suchen muß, sind also: der von —10 bis —1, wo zuverlässig eine reelle Wurzel existirt; der von 0 bis 1, wo nicht

mehr als zwei reelle Wurzeln zu finden sind, und der von 1 bis 10, wo man auch zwei Wurzeln suchen muß. Uebrigens ist es gewiß, daß die Gleichung zwei imaginäre Wurzeln hat, die in dem unendlich kleinen Intervalle von <0 bis >0 liegen.

§. 18. Wir wollen noch zwei Beispiele geben, um daran das Verfahren zu zeigen, welches befolgt werden muß, um die Intervalle leicht zu unterscheiden, wo die Wurzeln gesucht werden müssen. Das erste ist die Gleichung:

$$x^5+3x^4+2x^3-3x^2-2x-2=0.$$

Man hat:

$$\begin{aligned}
X &= x^5+3x^4+2x^3-3x^2-2x-2,\\
X' &= 5x^4+12x^3+6x^2-6x-2,\\
X'' &= 20x^3+36x^2+12x-6,\\
X''' &= 60x^2+72x+12,\\
X^{IV} &= 120x+72,\\
X_V &= 120,
\end{aligned}$$

und wenn man die Zahlen -1, 0, 1, 10 substituirt, so findet man:

	X^V	X^{IV}	X'''	X''	X'	X
(<-1)	+	−	+	−	+	−
(-1)	+	−	0	−	+	−
(>-1)	+	−	−	−	+	−
(0)	+	+	+	−	−	−
(1)	+	+	+	+	+	−
(10)	+	+	+	+	+	+

Aus der Betrachtung dieser Reihen sieht man:

1) daß die gegebene Gleichung unter -1 keine Wurzel haben kann, weil die Reihe (<-1) fünf Zeichenwechsel hat.

2) daß zwischen den Grenzen <-1 und >-1 zwei imaginäre Wurzeln liegen, weil die Reihe (<-1) fünf, und die Reihe (>-1) nur drei Zeichenwechsel hat.

3) daß man zwischen -1 und 0 zwei Wurzeln suchen muß; denn die Reihe (>-1) hat 3 Zeichenwechsel, und die Reihe (0) nur einen.

4) daß zwischen 0 und 1 keine Wurzel liegen kann; denn die beiden Reihen (0) und (1) haben gleichviel Zeichenwechsel, nämlich einen.

5) daß die Gleichung zwischen 1 und 10 eine einzige reelle Wurzel hat; denn die Reihe (10) hat einen Zeichenwechsel weniger als die Reihe (1).

§. 19. Das zweite Beispiel ist die Gleichung:

$$x \quad - 10x^3 + 6x + 1 = 0.$$

Es ist:

$$X \;=\; x^5 - 10x^3 + 6x + 1$$
$$X' \;=\; 5x^4 - 30x^2 + 6$$
$$X'' = 20x^3 - 60x$$
$$X''' = 60x^2 - 60$$
$$X^{IV} = 120x$$
$$X^{V} = 120,$$

und durch Substitution wird folgendes Schema gebildet:

	X^{V}	X^{IV}	X'''	X''	X'	X
(— 10) ...	+	—	+	—	+	—
(< — 1) ...	+	—	+	+	—	+
(— 1) ...	+	—	0	+	—	+
(> — 1) ...	+	—	—	+	—	+
(< 0) ...	+	—	—	+	+	+
(0) ...	+	0	—	0	+	+
(> 0) ...	+	+	—	—	+	+
(< 1) ...	+	+	—	—	—	—
(1) ...	+	+	0	—	—	—
(> 1) ...	+	+	+	—	—	—
(10) ...	+	+	+	+	+	+

Aus den Reihen (— 10) und (< — 1) folgt, daß zwischen — 10 und — 1 eine Wurzel liegt;

aus den Reihen (> — 1) und (< 0), daß man zwischen — 1 und 0 zwei Wurzeln suchen muß;

aus den Reihen (> 0) und (< 1), daß die Gleichung zwischen 0 und 1 eine reelle Wurzel hat;

aus den Reihen (> 1) und (10), daß man zwischen 1 und 10 zwei Wurzeln suchen muß.

§ 20. Es würde unnütz sein, noch mehr Uebungsbeispiele zu geben. Wir haben sie so gewählt, daß sie eine große Anzahl verschiedene Fälle darbieten.

Es ist einleuchtend, daß durch das Vorhergehende die Oerter der Wurzeln, d. h. die Grenzen, zwischen welchen man sie suchen muß, ganz zuverlässig angegeben werden; aber die Natur der Wurzeln wird nicht immer dadurch bestimmt. Man sieht im Gegentheil, daß,

wenn durch die Anwendung des Lehrsatzes eine gerade Zahl von Wurzeln angedeutet werden zwischen gegebenen Grenzen, alle diese Wurzeln imaginär sein können. Wir haben folglich eine zweite Aufgabe zu lösen, welche die Bestimmung der Natur der angezeigten Wurzeln zum Objecte hat. Wir werden eine vollständige Auflösung dieser Aufgabe geben. Sie ist sehr verschieden von der ersten, bisher abgehandelten Aufgabe, deren Object darin bestand, bloß die Grenzen anzugeben, zwischen welchen man die Wurzeln suchen muß.

Man muß sich vorstellen, daß die Differenz zweier, x beigelegten Werthe, wovon der eine sehr weit unter, und der andere sehr weit über 0 liegt, in eine Menge von Intervallen abgetheilt sei. Jedes dieser Intervalle hat zwei Grenzen a und b, und diese Intervalle sind von zweierlei Art:

1) die, in welchen man keine Wurzel der gegebenen Gleichung suchen muß. Man erkennt sie daran, daß, wenn man ihre beiden Grenzen a und b in die Reihe der Functionen $f^{(m)}(x)$, $f^{(m-1)}(x)$... ...$f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$, substituirt, welches zwei Reihen von Resultaten gibt, die zweite Reihe eben so viele Zeichenwechsel hat, als die erste.

2) die Intervalle, in welchen man die Wurzeln suchen muß. Sie werden daran erkannt, daß, wenn man die Grenzen a und b in die Reihe der Functionen substituirt, die durch die Substitution der größern Grenze b gegebene Reihe weniger Zeichenwechsel hat, als die durch die Substitution der kleinern Grenze a gegebene Reihe.

Die ersten Intervalle werden ausgeschlossen, und ihre Totalausdehnung ist ungleich größer, als die der zweiten. Diese zweiten Intervalle unterscheiden sich selbst wieder in zwei verschiedene Arten, nämlich in solche, wo die Wurzeln wirklich existiren, und in solche, wo die Wurzeln fehlen, imaginär sind. Es bleibt uns noch übrig, diese Unterscheidung deutlich auseinanderzusetzen, und zur Unterscheidung dieser beiden Arten von Intervallen zuverlässige und leicht anzuwendende Regeln zu geben.

§ 21. Die Aufgabe bietet sich z. B. bei der Auflösung der in §. 12. angeführten Gleichung $x^5 - 3x^4 - 14x^3 + 95x^2 - 46x - 101 = 0$ dar. Das allgemeine Theorem zeigt an, daß man zwischen den Grenzen 1 und 10 drei Wurzeln suchen muß. Man könnte dieses Intervall in zwei Theile theilen, wenn man eine Zahl c, größer als 1 und kleiner als 10 in die Reihe der Functionen substituirte, und die vorhergehenden Regeln auf die Partialintervalle von 1 bis c, und von c bis 10 anwendete. Führe man nun so fort, zwischenliegende Zahlen zu substituiren und die Intervalle zu zertheilen, so würde man, wenn alle 3 Wurzeln reell wären, dahin gelangen, sie von einander zu trennen, und man würde für jede derselben zwei Grenzen kennen, zwischen welchen sie allein liegt, welches der Zweck der Untersuchung ist. Aber wenn zwei der gesuchten Wurzeln imaginär sind, so hat die Unterabtheilung der Intervalle keine Grenze, und man weiß nicht, ob die Trennung der Wurzeln unmöglich ist, weil die Wurzeln imaginär sind, oder ob sie bloß retardirt wird, weil die Differenz der Wurzeln sehr klein ist.

Diese Schwierigkeit läßt sich nicht heben, wenn man sich auf

die Substitution zwischenliegender Werthe und die Vergleichung der Zeichen der Resultate beschränkt. Die Aufgabe fordert eine besondere Regel. Deswegen kann die Rollesche Methode der Cascaden nicht zur Bestimmung der Grenzen der Wurzeln dienen; denn es fehlt ihr an einem Merkmale zur Unterscheidung der imaginären Wurzeln.

Die newtonsche Näherungsregel lös't diese Aufgabe nicht; sie setzt sie als gelös't voraus. Diese newtonsche Methode ist eins der kostbarsten Elemente der Analysis, weil sie sich auf alle Zweige des Calculs erstreckt. Aber ihr Object besteht nicht in der Unterscheidung der imaginären Wurzeln. Deswegen haben Lagrange und Waring zu diesem Zwecke die Bestimmung der kleinsten Differenz der Wurzeln der Gleichung, oder einer kleinern Größe, als diese Differenz, vorgeschlagen. In theoretischer Hinsicht ist diese Auflösung richtig. Denn wenn man wüßte, daß die Differenz zweier reeller Wurzeln, welche am wenigsten von einander verschieden sind, größer ist, als eine gewisse Größe Δ; so brauchte man für x nur Zahlen zu substituiren, deren Differenz $=\Delta$, oder $<\Delta$ wäre. Auf diese Weise würde man alle Wurzeln gewiß unterscheiden, und wenn man nicht so viele Wurzeln fände, als der Grad in der gegebenen Gleichung Einheiten hat; so wären die durch diese Substitutionen nicht gesonderten Wurzeln von gerader Anzahl, und der Zahl der imaginären Wurzeln der gegebenen Gleichung gleich. Aber es ist leicht zu beurtheilen, daß eine solche Auflösungsmethode nicht zulässig ist. Denn 1) ist die Rechnung, durch welche der Werth der Grenze Δ bestimmt wird, für Gleichungen von einem etwas hohen Grade, unausführbar; 2) würde man Substitutionen vornehmen in solchen Intervallen, wo dem allgemeinen Lehrsatze in §. 7 gemäß keine Wurzel liegen kann. Man würde also zuvor diesen Lehrsatz anwenden müssen, und nur in den Intervallen Substitutionen vornehmen, wo die Wurzeln gesucht werden müssen. Durch diese Operation würde die Rechnung kürzer; aber der Werth von Δ bliebe immer noch zu berechnen, welches die Hauptschwierigkeit ist. Es war folglich nöthig, diese sehr wichtige Aufgabe, deren Object in der zuverlässigen Bestimmung der Natur der Wurzeln besteht, nach andern Prinzipien zu behandeln. Seit langer Zeit haben wir diese Aufgabe durch Verfahrungsarten gelös't, deren Anwendung kurz und leicht ist. Die Auflösung, welche wir in den folgenden Paragraphen auseinandersetzen wollen, haben wir früher in den Vorträgen auf der französischen polytechnischen Schule mitgetheilt; es ist die einleuchtendste und einfachste von allen, welche wir zu diesem Zwecke haben auffinden können. Es handelt sich hier um ein wesentliches Element, welches man als den schwierigsten Punkt der ganzen Theorie ansehen kann, und wir haben uns müssen angelegen sein lassen, ihn vollständig aufzuklären. Es ist nicht hinreichend, das analytische Prinzip, woraus wir sonst die Auflösung abgeleitet haben, zu geben; sondern es ist zweckmäßiger, die Folgerungen durch Anwendung der Constructionen recht deutlich zu machen. Nichts ist mehr geeignet, die Natur der Aufgabe deutlich vor Augen zu legen. Hierauf werden wir zur Erläuterung der allgemeinen Regel mehrere Beispiele geben.

§ 22. Es wird vorausgesetzt, daß, nachdem in die Reihe der Functionen:

$$f^{(m)}(x), f^{(m-1)}(x), \ldots f'''(x), f''(x), f'(x), f(x),$$

zwei Zahlen a und b, wovon b die größere ist, substituirt sind, die Reihe (a) zwei Zeichenwechsel mehr habe als die Reihe (b). Die Reihe (a) schließt sich z. B. mit den drei Zeichen:

$$+ \; - \; +$$

und die Reihe (b) mit:

$$+ \; + \; +.$$

Auch nehmen wir an, daß in den beiden Reihen zur Linken der eben bemerkten 3 Zeichen jedes Zeichen der Reihe (a) dem correspondirenden der Reihe (b) gleich sei. Man sieht, daß, wenn die substituirte Zahl von dem Werthe a zu dem Werthe b übergeht, die Zeichenreihe zwei Zeichenwechsel verliert. Es folgt also aus dem Lehrsatze in § 7, daß die Gleichung $f(x)=0$ nicht mehr als zwei Wurzeln zwischen den Grenzen a und b haben kann; aber man weiß nicht, ob diese beiden angezeigten Wurzeln reell sind, oder ob sie in diesem Intervalle fehlen, und dieses ist die zu lösende Aufgabe. Ließe man nun in jeder der beiden Reihen (a), (b) das letzte Zeichen weg, so enthielte die erste nur einen Zeichenwechsel mehr als die zweite; folglich kann die Gleichung $f'(x)=0$ zwischen a und b nicht mehr als eine Wurzel haben, und diese Wurzel ist zuverlässig reell.

Läßt man ferner von jeder der Reihen (a), (b) die beiden letzten Zeichen weg, so hat nach der Voraussetzung die erste Reihe nicht mehr Zeichenwechsel als die zweite. Folglich hat die Gleichung $f''(x)=0$ keine Wurzel zwischen a und b; d. h. es gibt in diesem Intervalle keine Zahl, welche für x an die Stelle gesetzt, die abgeleitete Function (Fluxion) der zweiten Ordnung $f''(x)$ zu Null machte.

§ 23. Die zwischen den Functionen $f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$ stattfindenden Relationen lassen sich leicht durch die Eigenschaften der Figuren darstellen. Die Ordinate y der Curve m p n (Fig. 1 und 2) drückt den Werth aus, welchen die Function $f(x)$ bekommt, wenn man der Veränderlichen x irgend einen durch die Abscisse o x gemessenen Werth gibt. Die Grenzen a und b sind die Abscissen o a, o b. Der Bogen m p n, welcher diesem Intervalle a b entspricht, hat keinen Inflexionspunkt; denn der Werth der Abscisse, welcher einem Inflexionspunkte entspricht, macht die abgeleitete Function der zweiten Ordnung $f''(x)$ oder $\frac{d^2 y}{dx^2}$ zu Null. Also hat der Bogen m p n keine Wendungen, und da der Werth von $f''(x)$, welcher den beiden Endpunkten des Bogens entspricht, positiv ist; so sieht man, daß dieser Bogen die Form hat, welche die Figur anzeigt. Er ist in seiner ganzen Ausdehnung concav. Seine Concavität ist nach oben gekehrt. In einem gewissen Punkte p dieses Bogens, ist die Tangente zur Axe der Abscissen parallel. Dieser Punkt entspricht dem Werthe von x, welcher die abgeleitete Function der ersten Ordnung $f'(x)$ gleich

Null macht; und da die Gleichung $f'(x)=0$ zwischen den Grenzen a und b nur eine Wurzel hat, so gibt es nur einen Punkt p, wo die Neigung der Tangente Null ist. Fügt man noch die Bedingung hinzu, daß die äußersten Ordinaten $f(a)$, $f(b)$ positiv sind; so sieht man, daß der Theil der krummen Linie, welchen man betrachtet, durch Fig. 1 oder 2 dargestellt wird. In der ersten gibt es zwei Durchschnittspunkte α und β, und die Abscissen $o\alpha$, $o\beta$ drücken die Werthe der beiden reellen Wurzeln aus. In der zweiten Figur erreicht der Bogen die Abscissenaxe nicht, und es gibt keinen Durchschnittspunkt; so daß die beiden gesuchten Wurzeln imaginär sind. Die Aufgabe besteht nun darin, die der beiden Constructionen zu unterscheiden, welche die gegebene Function in dem Intervalle der Grenzen a und b darstellt. Diese Aufgabe wäre leicht gelöst, wenn man den genauen Werth γ der Abscisse $o\gamma$ kännte, welche dem Punkte p entspricht, wo die Tangente zur Axe parallel ist; denn man brauchte diesen Werth γ nur in die Function $f(x)$ zu substituiren, und das Zeichen des Resultates zu suchen. Wenn dieses Zeichen von dem der beiden Resultate $f(a)$, $f(b)$ verschieden ist, so gibt es zwei Durchschnittspunkte α, β. Aber wenn $f(\gamma)$ dasselbe Zeichen hat, als $f(a)$, $f(b)$, so fehlen die beiden Durchschnittspuncte, und die Wurzeln sind imaginär.

Man könnte statt x in $f(x)$ einen genäherten Werth der Wurzel γ der Gleichung $f'(x)=0$ substituiren. Wenn das Resultat ein von dem Zeichen von $f(a)$ und $f(b)$ verschiedenes Zeichen hat, so sind die beiden Wurzeln zuverlässig reell und gesondert. Aber wenn das Zeichen des Resultates dasselbe ist, als das von $f(a)$, $f(b)$, so bleibt die Natur der Wurzeln ungewiß, denn man weiß nicht, ob, wenn man einen noch mehr genäherten Werth von γ in $f(x)$ substituirt, man nicht ein von dem Zeichen von $f(a)$ und $f(b)$ verschiedenes erhielte. Diese Schwierigkeit würde sich nothwendig jedesmal zeigen, wenn die Wurzeln imaginär wären, und sie würde immer statt finden, obgleich das Intervall der beiden Grenzen äußerst klein gemacht werden könnte.

§ 24. Um diese Zweideutigkeit zu beseitigen, bemerken wir, daß sich die zweite Construction (Fig. 2.) von der ersten (Fig. 1.) durch ein Merkmal unterscheidet, welches durch den Calcul ausgedrückt werden kann. Denn gesetzt, daß in der durch Fig. 2. dargestellten Construction durch die Punkte m und n zwei Tangenten bis zum Durchschneiden der Axe in a′ und b′ gezogen seien, daß in diesen Punkten a′, b′ die Ordinaten a′m′, b′n′ errichtet, und in den Punkten m′, n′ zwei neue Tangenten bis zum Durchschneiden der Axe gezogen seien; so leuchtet ein, daß nach einer oder mehrern solcher Operationen die Durchschnittspunkte der successiven Tangenten mit der Axe zuletzt außerhalb des Intervalles ab fallen werden, und die Entfernung des Punktes a von dem Durchschnittspunkte der Tangente und Axe, d. h. die Subtangente, wird zuverlässig größer werden als der Abstand ab. Wenn hingegen der Bogen mn zwischen a und b, wie in Fig. 1, zwei Durchschnittspunkte hat; so wird die eben ausgesprochene Bedingung niemals statt finden. Jede der Subtangenten aa′, a′a″... wird kleiner sein, als das Intervall ab,

a' b' ;... Dasselbe gilt von den Subtangenten b b', b' b'' in Vergleich zu den Intervallen b a; b' a'... Wenn man in dieser Construction der Figur 1 die Werthe zweier Subtangenten a a', b b' ohne Rücksicht auf das Zeichen, d. h. wenn man jedem das Zeichen + gibt, addirt; so wird die Summe immer kleiner sein, als der Abstand a b der beiden Grenzen. Dasselbe ist bei allen folgenden Subtangenten der Fall. Die Summe der an den beiden Endpunkten eines beliebigen Intervalles a b, a' b'... liegenden Subtangenten wird immer kleiner sein als dieses Intervall. Dieses ist ein unterscheidendes Merkmal des Falles, wo der Bogen m p n zwei Durchschnittspunkte hat.

Wir haben angenommen, daß der Punkt m' (Fig. 1 und 2) genau dem Endpunkte a' der Subtangente a a' entspricht. Die Folgerungen würden dieselben sein, wenn dieser Punkt m' einem benachbarten, und zwischen den Punkten a' und a liegenden Punkte entspräche.

§ 25. Wenn man sich des bekannten Ausdruckes der Subtangente b b' bedient, so kann man den Calcul leicht auf den vorhergehenden Satz anwenden. Das Verhältniß $\frac{dy}{dx}$ ist dem der beiden Linien n b und b b' gleich.

Folglich ist:

$$b\,b' = n\,b : \frac{dy}{dx} = f(b) : \frac{dx\,f'(b)}{dx}, \text{ oder } b\,b' = \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Man erhält also den numerischen Werth der Subtangente b b', wenn man den Quotienten der beiden Resultate $f(b)$ und $f'(b)$ bildet. Ebenso findet man den Werth der Subtangente a a', ohne Rücksicht auf das Zeichen, wenn man $f(a)$ durch $f'(a)$ dividirt. Der Ausdruck der Abscisse o b', welche dem Durchschnittspunkte b' der Tangente n b' und der Axe entspricht, ist im Allgemeinen $= x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Substituirt man in diesen Ausdruck a und b für x, so wird das zweite Resultat $b - \frac{f(b)}{f'(b)}$ immer größer sein, als das erste $a - \frac{f(a)}{f'(a)}$, wenn die Curve wie in Fig. 1 liegt. Diese Bedingung kann nur aufhören, statt zu finden, wenn der Bogen eine Lage hat, wie in Fig. 2, und in diesem Falle findet die Bedingung nothwendigerweise nicht mehr statt, wenn man die successiven Tangenten zieht. Das Merkmal der reellen Wurzeln wird also durch:

$$a - \frac{f(a)}{f'(a)} < b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \text{ oder } \frac{f(b)}{f'(b)} + \frac{f(a)}{-f'(a)} < b - a$$

ausgedrückt.

Hieraus folgt, daß man, wenn die beiden Grenzen a und b gegeben, und die Resultate $f'(a)$, $f(a)$, $f'(b)$, $f(b)$ bekannt sind,

um die Natur der beiden angezeigten Wurzel kennen zu lernen, zuerst $f(a)$ durch $f'(a)$ und $f(b)$ durch $f'(b)$ dividiren muß. Wenn einer dieser beiden Quotienten, oder die Summe derselben, ohne Rücksicht auf das Zeichen, der Differenz $b - a$ der beiden Grenzen gleich, oder größer als sie ist; so sind die beiden Wurzeln gewiß nicht reell.

Wenn aber die Differenz $b - a$ der beiden Grenzen größer ist, als die Summe der beiden Quotienten, so ist dieses ein Zeichen, daß der Abstand der beiden Grenzen, zwischen welchen man die Wurzeln sucht, noch nicht klein genug geworden ist, daß man die Natur der Wurzeln vermittelst einer einzigen Operation bestimmen könnte. Man muß den Abstand ab der beiden Grenzen durch Substitution einer zwischen a und b liegenden Zahl c in $f(x)$ in zwei Theile theilen, und das Zeichen des Resultates bemerken. Wenn das Zeichen von $f(c)$ nicht dasselbe ist, als das gemeinschaftliche Zeichen von $f(a)$, $f(b)$, so sieht man, daß die beiden Wurzeln reell sind; die eine liegt zwischen a und c, und die andere zwischen c und b. Der Abstand $b - a$ ist also in zwei Theile getheilt, wovon jeder eine gänzlich abgesonderte reelle Wurzel enthält.

Gewöhnlich ist eine erste Untersuchung zur Bestimmung der Natur der gesuchten Wurzeln hinreichend. Man findet, daß die Summe der Quotienten $\frac{f(a)}{-f'(a)}$, $\frac{f(b)}{f'(b)}$ größer ist, als die Differenz $b - a$, oder daß die Substitution einer zwischenliegenden Zahl c ein Resultat $f(c)$ gibt, dessen Zeichen von dem gemeinschaftlichen Zeichen von $f(a)$, $f(b)$ verschieden ist. Wenn keine dieser Bedingungen statt findet, so muß man schließen, daß die Grenzen a und b noch nicht genug zusammengezogen sind, daß die Natur der Wurzeln durch eine einzige Operation bestimmt werde. In diesem Falle gibt die Substitution der zwischenliegenden Zahl c für $f(c)$ das gemeinschaftliche Zeichen von $f(a)$ und $f(b)$. Bei den Resultaten $f'(a)$, $f'(b)$ und $f'(c)$ ist dieses nicht der Fall. Die beiden ersten haben nach der Voraussetzung verschiedene Zeichen; folglich hat eins der Resultate $f'(a)$, $f'(b)$ mit $f'(c)$ einerlei Zeichen, und das andere ein entgegengesetztes. Wir wollen diejenige der Grenzen a und b, welche, wenn sie in $f'(x)$ substituirt wird, ein Resultat gibt, welches das entgegengesetzte Zeichen von $f'(c)$ hat, mit d bezeichnen. Man sieht, daß die Gleichung $f'(x) = 0$ zwischen den neuen Grenzen c und d eine reelle Wurzel haben wird, und die beiden Wurzeln, deren Natur noch unbekannt ist, müssen zwischen c und d gesucht werden. Auf dieses zweite Intervall von c bis d wendet man also die Regel an, welche man auf das Intervall von a bis b angewandt hat, und sucht die Natur dieser Wurzeln durch ein dem eben beschriebenen völlig ähnliches Verfahren.

§ 26. Es muß bemerkt werden, daß die Natur der Wurzeln durch die vorhergehende Regel nicht bestimmt würde, wenn die beiden gesuchten Wurzeln reell, aber gleich wären. Man kann aber diesen besondern Fall leicht unterscheiden, und braucht nur die Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ zu vergleichen, um zu erfahren, ob sie einen

gemeinschaftlichen Divisor $\varphi(x)$ haben; und ob dieser gemeinschaftliche Divisor zwischen a und b eine reelle Wurzel hat. Wenn ein solcher Divisor nicht vorhanden ist, oder wenn die Gleichung $\varphi(x)=0$ zwischen a und b keine reelle Wurzel hat; so wird man finden, wenn man die Untersuchung so weit fortsetzt, als es die Form der Curve fordert, daß die gesuchten Wurzeln imaginär sind, oder sie werden, wenn sie reell sind, getrennt. In diesem letzten Falle wird der Abstand ab der beiden gegebenen Grenzen in zwei andere zerlegt, wo in jedem eine Wurzel liegt.

§ 27. Die Figuren 1 und 2 beziehen sich auf den Fall, wo $+$ das gemeinschaftliche Zeichen von $f(a)$, $f(b)$ ist. Wenn die beiden Zeichenreihen (a), (b), welche man vergleichen muß, und welche sich nur durch das vorletzte Zeichen $-$ unterscheiden, sich mit

$$- + -$$

und

$$- - -$$

schließen; so ist die Construction die der Figuren 1′ und 2′. Der Bogen mpn hat keine Wendungen, sondern bloß einen Punkt p, wo die Neigung der Tangente Null ist. Dieser Bogen ist in seiner ganzen Ausdehnung convex, weil die Fluxion der zweiten Ordnung negativ ist. Es finden zwei Durchschnittspunkte α und β statt, wenn die Lage des Bogens wie in Fig. 1′ ist, und diese beiden Durchschnittspunkte fehlen zugleich in dem Intervalle, wenn der Bogen wie in Fig. 2′ liegt. Die Regel, welche man befolgen muß, um zu erkennen, ob die beiden gesuchten Wurzeln reell oder imaginär sind, ist genau dieselbe als die vorhin gegebene.

§ 28. Wir wollen diese Regel kurz wiederholen:

Wenn man, nachdem zwei Grenzen a und b in die Reihe der Functionen:

$$f^{(m)}(x),\ f^{(m-1)}(x), \ldots f''(x),\ f'(x),\ f(x)$$

substituirt, und die Zeichen der Resultate der Reihe (a) mit denen der Resultate der Reihe (b) verglichen sind, bemerkt, daß die zweite Reihe (b) zwei Zeichenwechsel weniger hat, als die erste Reihe (a), und daß, wenn man die beiden letzten Zeichen jeder Reihe wegläßt, die zweite Reihe eben so viele Zeichenwechsel hat, als die erste; so muß man, um zu beurtheilen, ob die beiden angezeigten Wurzeln reell sind, die Resultate $f'(a)$, $f(a)$ und $f'(b)$, $f(b)$, ohne Rücksicht auf das Zeichen, d. h. indem man allen diesen Größen das Zeichen $+$ gibt, vergleichen. Wenn einer der beiden Quotienten $\frac{f(a)}{f'(a)}$, $\frac{f(b)}{f'(b)}$, oder die Summe derselben, größer ist als die Differenz $b-a$, oder ihr gleich; so sind die beiden gesuchten Wurzeln imaginär.

Wenn die vorhergehende Bedingung nicht statt findet, so daß die Summe der beiden Quotienten kleiner ist, als die Differenz $b-a$; so untersucht man, ob die beiden Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ einen gemeinschaftlichen Factor $\varphi(x)$ haben, und ob die Gleichung $\varphi(x)=0$

zwischen a und b eine reelle Wurzel hat. Wenn dieser gemeinschaftliche Factor existirt, und wenn die Gleichung $\varphi(x) = 0$ zwischen a und b eine reelle Wurzel c hat; so hat die Gleichung zwei reelle Wurzeln $= c$.

Wenn aber die beiden Functionen $f(x)$, $f'(x)$ keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, oder wenn dieser Divisor existirt, und die Gleichung $\varphi(x) = 0$ hat keine reelle Wurzel zwischen a und b, was man leicht vermittelst der obigen Prinzipien erkennt; so muß man untersuchen, ob die beiden zwischen a und b angezeigten Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ durch die Substitution einer zwischen a und b liegenden Zahl c getrennt werden können. Man substituirt also eine solche Zahl c in $f(x)$. Wenn das Zeichen von $f(c)$ nicht dasselbe ist, als das von $f(a)$ und $f(b)$, so sind die beiden gesuchten Wurzeln reell; die eine liegt zwischen a und c, und die andere zwischen c und b. Hat hingegen $f(c)$ dasselbe Zeichen, als $f(a)$, $f(b)$, so schließt man daraus, daß die beiden Grenzen a und b einander noch nicht hinreichend genähert waren, daß sich die Natur der Wurzeln durch eine erste Untersuchung erkennen ließe. Wählt man folglich diejenige der beiden Grenzen a und b, deren Substitution in $f'(x)$ ein Resultat gibt, welches das entgegengesetzte Zeichen von $f'(c)$ hat, und bezeichnet diese Grenze durch d; so operirt man zwischen den Grenzen c und d eben so, wie man zwischen den Grenzen a und b operirt hat. Setzt man auf diese Weise die Anwendung dieses Verfahrens fort, dessen Ausübung sehr einfach ist; so wird man auf einem sichern Wege finden, daß in dem gegebenen Intervalle keine Wurzeln liegen, oder sie sondern, wenn sie existiren.

§ 29. Wir wollen diese Regel auf verschiedene Beispiele anwenden, und zuerst auf die § 14. angeführte Gleichung:

$$x^3 + 2x^2 - 3x + 2 = 0$$

Man hat gesehen, daß diese Gleichung zwischen -10 und -1 eine reelle Wurzel hat, welche ganz abgesondert ist. Die Vergleichung der Reihen, welche den Grenzen 0 und 1 entsprechen, zeigt, daß man die beiden andern Wurzeln in diesem Intervalle suchen muß; aber man weiß nicht, ob diese beiden Wurzeln wirklich vorhanden sind, oder ob sie zwischen diesen Grenzen fehlen, d. h. ob sie imaginär sind.

Um von der vorhergehenden Regel Gebrauch zu machen, vergleicht man die beiden Reihen:

	$f'''(x)$,	$f''(x)$,	$f'(x)$,	$f(z)$
(0)...	+	+	−	+
			3	2
(1)...	+	+	+	+
			4	2

Unter die beiden letzten Zeichen setzt man die Zahlenwerthe der Resultate; denn diese Werthe sind zur Bestimmung der Natur der Wurzeln erforderlich. Die Reihen bieten den Fall dar, welchen wir

zuerst untersucht haben; d. h. die Gleichung $f''(x)=0$ kann zwischen 0 und 1 keine reelle Wurzel haben, und die Gleichung $f'(x)=0$ hat zwischen diesen Grenzen eine Wurzel. Es kommt darauf an, zu bestimmen, ob die Gleichung $f(x)=0$ zwischen diesen Grenzen zwei reelle Wurzeln hat, oder ob die beiden angezeigten Wurzeln imaginär sind. Man untersucht der Regel gemäß, ob einer der Quotienten $\frac{f(a)}{f'(a)}$, $\frac{f(b)}{f'(b)}$ oder ihre Summe, ohne Rücksicht auf das Zeichen, die Differenz 1 der beiden Grenzen übertrifft, oder ihr gleich ist. Da diese Bedingung statt findet, so ist es gewiß, daß die beiden angezeigten Wurzeln imaginär sind. Also hat die gegebene Gleichung eine einzige reelle Wurzel zwischen -10 und -1, und zwischen 0 und 1 fehlen zwei Wurzeln, oder sie sind imaginär.

§ 30. Zum zweiten Uebungsbeispiele der Regel wählen wir die Gleichung:

$$x^5+x^4+x^3-25x-36=0$$

welche in § 15. angeführt ist. Man hat gesehen, daß zwischen -10 und -1 zwei Wurzeln angezeigt sind, und es handelt sich darum, zu bestimmen, ob diese beiden Wurzeln reell sind, oder ob sie zwischen diesen Grenzen fehlen. Diese Aufgabe wird gelöst, wenn man nach der Regel in § 28. die beiden Reihen vergleicht:

					$f''(x)$,	$f'(x)$,	$f(x)$
(-10)	+	−	+	−	+	−	
					45955	89686	
(-1)	+	−	+	−	−	−	
					16	10	

Wir haben unter die beiden letzten Zeichen jeder Reihe die Zahlenwerthe der Resultate gesetzt. Die beiden verglichenen Reihen erfüllen die Bedingungen, welche die Regel voraussetzt. Man untersucht also, ob einer der Quotienten $\frac{89686}{45955}$ und $\frac{10}{16}$, oder ihre Summe die Differenz 9 der beiden Grenzen übersteigt, oder ihr gleich ist; und da dieses nicht der Fall ist, so folgt, daß der Abstand von -10 bis -1 zerlegt werden muß. Aber ehe man zur Substitution einer zwischenliegenden Zahl schreitet, muß man untersuchen, ob die Functionen $f(x)$, $f'(x)$, oder:

$$x^5+x^4+x^3-25x-36,\ 5x^4+4x^3+2x-25,$$

einen gemeinschaftlichen Divisor haben, und ob dieser Divisor zwischen -10 und -1 eine reelle Wurzel hat. Da dieser Divisor nicht existirt, so substituirt man für x eine zwischen -10 und -1 liegende, und durch eine einzige Ziffer ausgedrückte Zahl. Nimmt man -2 für diese zwischenliegende Zahl, und sucht die Zeichen der Reihe der Resultate, welche die Substitution von -2 in die Functionen:

$$f^{V}(x),\ f^{IV}(x),\ f'''(x),\ f''(x),\ f'(x),\ f(x),$$

gibt, so findet sich:

$$(-10) \ldots . + \; - \; + \; - \; + \; -$$
$$(-2) \ldots . + \; - \; + \; - \; + \; +$$
$$(-1) \ldots . + \; - \; + \; - \; - \; -$$

Die Reihe (— 10) hat 5, die Reihe (— 2) hat 4 und die Reihe (— 1) hat 3 Zeichenwechsel. Folglich sind die angezeigten Wurzeln durch die Substitution der Zahl — 2 gesondert. Sie sind mithin reell; die eine liegt zwischen — 10 und — 2 und die andere zwischen — 2 und — 1.

Also ist die Operation, welche die Bestimmung der Natur und Grenzen der Wurzeln zum Gegenstande hat, vollendet. Die Gleichung hat zwei imaginäre und drei reelle Wurzeln; die eine liegt zwischen — 10 und — 2, die zweite zwischen — 2 und — 1 und die dritte zwischen 1 und 10.

§ 31. Bisher haben wir vorausgesetzt: 1) daß die zweite Reihe bloß zwei Zeichenwechsel weniger hat als die erste, und 2) daß die beiden Reihen, wenn man die beiden letzten Zeichen wegläßt, dieselbe Anzahl von Zeichenwechseln haben. Aber die Folge der Zeichen in den beiden Reihen ist einer sehr großen Anzahl von Verbindungen fähig, und die Zahl der angezeigten Wurzeln kann größer sein als 2. Es bleibt folglich noch zu zeigen übrig, daß die Anwendung derselben Regel in allen möglichen Fällen zur Unterscheidung der imaginären Wurzeln hinreichend ist. Diese Unterscheidung geschieht vermittelst der Vergleichung der Resultate, welche die Substitution der Grenzen a und b in die Functionen:

$$f^{(m)}(x),\; f^{(m-1)}(x),\; f^{(m-2)}(x), \ldots . f''(x),\; f'(x),\; f(x),$$

gibt.

Diese Resultate sind:

$$f^{(m)}(a),\; f^{(m-1)}(a),\; f^{(m-2)}(a), \ldots f''(a),\; f'(a),\; f(a)$$

$$f^{(m)}(b),\; f^{(m-1)}(b),\; f^{(m-2)}(b), \ldots f''(b),\; f'(b),\; f(b).$$

Man zähle in der ersten Reihe die Zeichenwechsel von dem ersten Gliede zur Linken an bis zum zweiten, dritten, vierten, etc., und bemerke unter jedem Gliede, z. B. unter $f^{(m-i)}(a)$ die Zahl h der Zeichenwechsel, welche in dieser Reihe bis zum Gliede $f^{(m-i)}(a)$ incl. enthalten sind. Es sei k die Zahl der Zeichenwechsel, welche in der zweiten Reihe bis zu dem Gliede $f^{(m-i)}(b)$ vorkommen. Man bilde die Differenz $h - k = \delta$ der zwei, in den beiden Reihen bemerkten correspondirenden Zahlen, und schreibe diese Differenz δ, welche niemals negativ sein kann (§ 7.), zwischen die beiden Glieder; so wird dadurch eine, zwischen den beiden Reihen liegende Reihe von Indices gebildet.

§ 32. Wenn z. B. die Zeichen in den beiden Reihen folgende sind:

	$f^{(m)}(x)$,	$f^{(m-1)}(x)$,	$f^{(m-2)}(x)$,	.	.	.	$f'''(x)$,	$f''(x)$,	$f'(x)$,	$f(x)$
	0	1	2	2	3	4	4	5	6	7
(a)....	+	—	+	+	—	+	+	—	+	—
	0	0	1	0	1	2	1	2	2	3
(b)....	+	—	—	+	+	+	—	—	+	+
	0	1	1	2	2	2	3	3	4	4

so ist die nach der vorhergehenden Regel gebildete Reihe der Indices:

0 0 1 0 1 2 1 2 2 3.

Wir wollen diese Reihe im Allgemeinen durch:

$$0\ \delta\ \delta'\ \delta''\ \delta'''\ \ldots .\ \Delta$$

bezeichnen.

Der letzte Index Δ zeigt, daß die gegebene Gleichung $f(x) = 0$ zwischen a und b nicht mehr reelle Wurzeln haben kann, als Δ Einheiten hat. Im Allgemeinen zeigt jeder beliebige Index δ, welcher der Function $f^{(n)}(x)$ entspricht, an, daß die Gleichung $f^{(n)}(x) = 0$ zwischen den Grenzen a und b nicht mehr als δ reelle Wurzeln haben kann. Also kann in dem angeführten Beispiele die Gleichung $f(x) = 0$ nicht mehr als 3 Wurzeln haben, zwischen a und b, und eine dieser Wurzeln ist zuverlässig reell. Was die Gleichung $f'(x)$ anlangt, so ist die Zahl der angezeigten Wurzeln $= 2$. Diese Gleichung kann also zwischen denselben Grenzen a und b nicht mehr als 2 Wurzeln haben. Dasselbe gilt von der Gleichung $f''(x) = 0$. Für die Gleichung $f'''(x) = 0$ ist die Zahl der angezeigten Wurzeln $= 1$; folglich ist diese Wurzel gewiß reell.

Wenn der Werth eines beliebigen Index durch δ bezeichnet wird, so ist der folgende Index δ, oder $\delta - 1$ oder $\delta + 1$. Dieses ist eine offenbare Folgerung aus der Bildung der Reihe der Indices.

§ 33. Wenn der letzte Index $\Delta = 0$ ist, so muß man, wie schon gesagt, zwischen den Grenzen a und b keine Wurzel der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ suchen. Ist dieser letzte Index $\Delta = 1$, so hat die Gleichung $f(x) = 0$ zwischen a und b eine einzige reelle Wurzel. Die vorhergehenden Indices, welche $f'(x)$ und $f''(x)$ entsprechen, können von 0 oder 1 verschieden sein; aber es ist leicht einzusehen, daß, wenn man den Abstand von a bis b durch Substitution zwischenliegender Zahlen beliebig verkleinert, derselbe so bestimmt werden kann, daß der vorletzte Index, welcher $f'(x)$ entspricht, $= 0$ ist. Denn $f(x)$ und $f'(x)$ haben keinen gemeinschaftlichen Divisor $\varphi(x)$, welcher durch die Substitution einer zwischen a und b liegenden Zahl Null werden könnte, weil, wenn dieses der Fall wäre, die Gleichung $f(x) = 0$ zwischen a und b zwei gleiche Wurzeln haben würde. Da nun aber der letzte Index $= 1$ ist, so kann die Gleichung $f(x) = 0$ zwischen a und b nicht mehr als eine reelle Wurzel haben. Man kann also immer zwei Grenzen a' und b'

finden, zwischen welchen die Gleichung $f'(x)=0$ keine Wurzel haben kann. Folglich ist der letzte Index für die Grenzen a' und b', $=1$ und der vorletzte $=0$.

Die Wahrheit dieser Folgerung wird durch Construction sehr einleuchtend. Denn es ist gewiß, daß die Linie, deren Gleichung $y=f(x)$ ist, die Axe der Abscissen in einem gewissen, zwischen a und b liegenden Punkt α schneidet (Fig. 3.), weil die Gleichung $f(x)=0$, nach der Voraussetzung, zwischen diesen Grenzen eine reelle Wurzel hat. Nun ist aber klar, daß es zu beiden Seiten des Durchschnittspunktes α zwei Punkte a' und b' von solchem Abstande gibt, daß der den Grenzen a' und b' entsprechende Bogen $\mu\alpha\nu$ keinen Punkt hat, wo die Neigung der Tangente $=0$ wäre. Es würde nur eine einzige Ausnahme statt finden, wenn diese Neigung in dem Durchschnittspunkte selbst Null wäre. Aber in diesem Falle würden die beiden Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ für den Werth α von x zugleich verschwinden. Folglich würde die Gleichung $f(x)=0$ zwischen a und b wenigstens zwei reelle Wurzeln haben. Mithin würde der letzte Index nicht, wie vorausgesetzt ist, $=1$, sondern er würde wenigstens $=2$ sein, weil die Gleichung $f(x)=0$ zwischen den beiden Grenzen nicht mehr gleiche oder ungleiche reelle Wurzeln haben kann, als der letzte Index Einheiten hat.

Wenn der Abstand der beiden Grenzen dieser Bedingung, welche immer erfüllt werden kann, nämlich daß der letzte Index $=1$ und der vorletzte $=0$ ist, Genüge leistet; so ist die zwischen diesen Grenzen liegende Wurzel ganz abgesondert, und wir geben in dem folgenden Abschnitte die Regeln an, ihren Werth auf dem kürzesten Wege zu berechnen.

§ 34. Wenn der letzte Index weder 0, noch 1 ist, so müssen zwischen den Grenzen a und b mehrere Wurzeln gesucht werden, und alsdann braucht man nur die Regel anzuwenden, welche zur Unterscheidung der imaginären Wurzeln dient.

Gesetzt, der letzte Index sei $=2$ oder größer als 2; so wird die Absonderung der Wurzeln auf folgende Weise bewerkstelligt.

Nachdem man auf die oben beschriebene Art die Reihe der Indices zwischen den correspondirenden Gliedern der Reihen (a) und (b) gebildet hat, geht man in dieser von der Rechten nach der Linken so weit fort, bis man zum ersten Male den Index 1 findet. Es sei $f^{(n)}(x)$ diejenige der Functionen der Reihe:

$$f^{(m)}(x),\ f^{(m-1)}(x),\ldots f^{(n)}(x),\ldots f'''(x),\ f''(x),\ f'(x),\ f(x),$$

welche diesem Index entspricht. Man sieht, daß die Wurzeln bis zu diesem Gliede abgesondert sind; d. h. wenn man bei $f^{(n)}(x)$ stehen bleibt, so hat die Gleichung $f^{(n)}(x)=0$ zwischen a und b zuverlässig nur e i n e reelle Wurzel. Diese Absonderung muß man nun so fortsetzen, daß sich der Index 1 immer mehr dem rechten Ende der Reihe nähert, bis daß der letzte Index $\Delta=1$ ist, womit sich die Operation schließt.

Auf den Index 1, bei welchem man zuerst stehen blieb, und welcher der Function $f^{(n)}(x)$ entspricht, folgt zur Rechten nothwen-

dig der Index 2. Denn wir haben vorhin bemerkt, daß der auf den Index δ folgende Index entweder δ, oder $\delta - 1$, oder $\delta + 1$ ist. Mithin kann auf den in Rede stehenden Index 1, nur 1 oder 0, oder 2 folgen. Nun kann aber dieser folgende Index nicht $= 1$ sein, weil man bei dem ersten Index 1 stehen geblieben ist. Wenn der folgende Index 0 wäre, so müßte derselbe in dem spätern Theile der Reihe größer werden, weil sein letzter Werth nach der Voraussetzung 2 oder größer als 2 ist. Folglich würde der wachsende Index 0 auch den Werth 1 annehmen. Mithin würde der Index, bei welchem man stehen blieb, nicht, wie vorausgesetzt wird, der erste zur Rechten sein, der $= 1$ ist. Also folgt auf den am nächsten am rechten Ende liegenden Index 1 der Index 2. Wenn nun vor diesem Index 1 nicht 0 vorhergeht, so kann man die Grenzen a und b so zusammen ziehen, daß diese Bedingung erfüllt wird. Denn gesetzt, daß die den Functionen $f^{(n)}(x)$ und $f^{(n-1)}(x)$ entsprechenden Indices 1 und 2 sind, und daß der der vorhergehenden Function $f^{(n+1)}(x)$ entsprechende Index nicht Null ist; so bildet man in dem Abstande der Grenzen a und b einen kleinern zwischen a′ und b′, in welchem die Gleichung $f^{(n+1)}(x) = 0$ keine Wurzel hat; und wir haben in dem Vorhergehenden (§ 33.) bewiesen, daß diese Bedingung immer leicht erfüllt werden kann. Man hat also in dem Intervalle der gegebenen Grenzen a und b ein zwischen neuen Grenzen a′ und b′ liegendes Partialintervall zu betrachten, welches so beschaffen ist, daß die den Functionen $f^{(n+1)}(x)$ und $f^{(n)}(x)$ entsprechenden Indices respective 0 und 1 sind. Also besteht das ursprüngliche Intervall von a bis b aus drei andern, nämlich aus dem von a bis a′, dem von a′ bis b′ und dem von b′ bis b.

Es ist einleuchtend, daß die Gleichung $f^{(n)}(x) = 0$ in dem ersten dieser Intervalle, von a bis a′, und in dem dritten, zwischen den Grenzen b und b′, keine Wurzel haben kann, weil die einzige reelle Wurzel, welche zwischen den Grenzen a und b liegt, zwischen den neuen Grenzen a′ und b′ liegt. Folglich ist für jedes dieser äußern Intervalle von a bis a′, oder von b′ bis b der entsprechende Index der Function $f^{(n)}(x)$, 0. Mithin geht für jedes dieser Intervalle von a bis a′ und von b′ bis b die Trennung der Wurzeln über die Function $f^{(n)}(x)$ hinaus; d. h. wenn es in dem einen oder dem andern dieser Partialintervalle, nach dem Index 0 einen Index 1 gibt, so entspricht er einer weiter nach dem Ende zur Rechten liegenden Function als $f^{(n)}(x)$. Was das Partialintervall von a′ bis b′ betrifft, so weiß man, daß der $f^{(n)}(x)$ entsprechende Index der letzte ist, welcher $= 1$ ist; es ist aber auch möglich, daß es noch einen andern Index $= 1$ gibt, der weiter zur Rechten liegt. In diesem Falle ist die Sonderung der Wurzeln über die Function $f^{(n)}(x)$ hinaus fortgesetzt. Aber es kann auch geschehen, daß der $f^{(n)}(x)$ entsprechende Index 1 noch für dieses Intervall von a′ bis b′ am nächsten am Ende zur Rechten liegt. In diesem zweiten Falle folgt auf den erwähnten Index 1 ein Index 2. Folglich entsprechen den Functionen:

$$f^{(n+1)}(x), \quad f^{(n)}(x), \quad f^{(n-1)}(x),$$

die Indices:

$$0 \qquad 1 \qquad 2.$$

Aus dieser Untersuchung folgt, daß der am nächsten am Ende zur Rechten liegende Index 1 durch Zertheilung des ursprünglichen Intervalles der Grenzen a und b, in jedem Partialintervalle immer weiter nach der Rechten fortgerückt wird, wofern man nicht findet, daß in gewissen Theilen des Intervalles auf den letzten Index 1 ein Index 2 folgt und 0 vorhergeht. Nur wenn diese letzte Bedingung erfüllt wird, ist zu untersuchen, ob die angezeigten Wurzeln imaginär sind. In allen andern Fällen muß man die Absonderung der Wurzeln soweit fortsetzen, bis der letzte Index der Reihe $=1$ ist.

§ 35. Es bleibt also noch der Fall zu betrachten übrig, wo auf den letzten Index 1 der Index 2 folgt und 0 vorhergeht.

Es sei folglich der zwischen den beiden Grenzen a und b liegende Abstand so beschaffen, daß, wenn man die Zeichenreihe (a), welche von der Substitution der Grenze a in die Functionen:

$$f^{(m)}(x),\ f^{(m-1)}(x),\ f^{(m-2)}(x), \ldots f''(x),\ f'(x),\ f(x)$$

herrührt, mit der Reihe (b), welche die Substitution der andern Grenze b gibt, vergleicht, und durch diese Vergleichung die Reihe der Indices bildet, auf den letzten zur Rechten befindlichen Index $=1$ ein Index $=2$ folgt und 0 vor ihm vorhergeht. Die auf einander folgenden Indices:

$$0 \qquad 1 \qquad 2$$

sollen den Functionen:

$$f^{(n+1)}(x),\ f^{(n)}(x),\ f^{(n-1)}(x)$$

entsprechen.

Demnach hat die Gleichung $f^{(n+1)}(x)=0$ zwischen a und b keine Wurzel. Die Gleichung $f^{(n)}(x)$ hat in diesem Intervalle eine einzige reelle Wurzel, und kann deren nicht mehr haben. Was die Gleichung $f^{(n-1)}(x)=0$ anlangt, so kann sie zwischen a und b nicht mehr als zwei reelle Wurzeln haben, und es kommt darauf an, zu bestimmen, ob diese Wurzeln zwischen diesen Grenzen existiren, oder fehlen (imaginär sind). In dem ersten Falle würde die Substitution der genauen Wurzel der Gleichung $f^{(n)}(x)=0$ in $f^{(n-1)}(x)$ und $f^{(n+1)}(x)$ Resultate von entgegengesetztem Zeichen geben, und im zweiten Falle würden die Resultate dieser beiden Substitutionen einerlei Zeichen haben. Die Aufgabe besteht nun darin, zu unterscheiden, welcher von diesen beiden Fällen statt findet. Diese Aufgabe haben wir durch die im § 28. ausgesprochene Regel gelöst. Man braucht also diese Regel nur auf die drei Functionen $f^{(n+1)}(x)$, $f^{(n)}(x)$, $f^{(n-1)}(x)$ und auf die Grenzen a und b anzuwenden. Fände man, daß die beiden Wurzeln der Gleichung $f^{(n-1)}(x)=0$ reell sind, so sind sie getrennt und der Abstand der Grenzen a und b ist in zwei andere getheilt, wovon man für jeden die entsprechende Reihe der Indices hat. In beiden Reihen wird der am nächsten am rechten Ende liegende Index 1 über die Function $f^{(n)}(x)$ hinaus gerückt.

Wenn man aber fände, daß der Gleichung $f^{(n-1)}(x)=0$ in dem Intervalle von a bis b zwei reelle Wurzeln fehlen; so würde bei

allen folgenden Gleichungen:

$$f^{(n-2)}(x)=0,\ f^{(n-3)}(x)=0, \ldots f''(x)=0,\ f'(x)=0,\ f(x)=0$$

dasselbe der Fall sein. Denn in der Gleichung $f^{(n-1)}(x)=0$ fehlen zwei Wurzeln, weil zwischen denselben Grenzen eine reelle Wurzel der Gleichung $f^{(n)}(x)=0$ liegt, welche, in $f^{(n+1)}(x)$ und $f^{(n-1)}(x)$ substituirt, zwei Resultate von demselben Zeichen gibt. Folglich verliert die Zeichenreihe der Resultate zwei Zeichenwechsel, wenn der Werth von x dem Werthe gleich wird, welcher die Function $f^{(n)}(x)$ zu Null macht. Also fehlen der gegebenen Gleichung $f(x)=0$ zwischen den Grenzen a und b auch zwei reelle Wurzeln. Hieraus folgt, daß in jedem der Indices, welche den Functionen:

$$f^{(n)}(x),\ f^{(n-1)}(x),\ f^{(n-2)}(x),\ f^{(n-3)}(x), \ldots f''(x),\ f'(x),\ f(x)$$

entsprechen, sich ein Theil befindet, der $=2$ ist, und den beiden Wurzeln entspricht, welche zwischen diesen Grenzen in den Gleichungen:

$$f^{(n)}(x)=,\ f^{(n-1)}(x)=0,\ f^{(n-2)}(x)=0, \ldots f''(x)=0,$$
$$f'(x)=0,\ f(x)=0$$

fehlen. Dieser Theil jedes Index, welcher $=2$ ist, muß also von dem andern Theile unterschieden werden, und man kann ihn hinweglassen. Der übrigbleibende Theil zeigt an, wie viele Wurzeln zwischen den Grenzen noch gesucht werden müssen. Man zieht also von allen Indices, welche den Functionen:

$$f^{(n-1)}(x),\ f^{(n-2)}(x),\ f^{(n-3)}(x), \ldots f''(x),\ f'(x),\ f(x)$$

entsprechen, 2 ab, so daß der Index von $f^{(n-1)}(x)$ Null wird.

Wenn man die eben bewiesenen Sätze zusammen stellt, so sieht man, daß die vorhergehende Operation in allen Fällen, die beiden Wurzeln der Gleichung $f^{(n-1)}(x)=0$ mögen reell sein, oder zwischen den Grenzen fehlen, neue Reihen von Indices gibt, in welchem das am nächsten nach dem rechten Ende liegende Glied 1 weiter als zuvor nach diesem Ende fortgerückt ist. Durch Anwendung dieser Regel auf jede dieser Reihen, wird man nothwendig auf Reihen von Indices kommen, deren letztes Glied $=0$ oder $=1$ sein wird.

§ 36. Die beiden folgenden Beispiele bieten von der eben zur Trennung der Wurzeln gegebenen Regel Anwendungen dar.

In § 12 hat man aus der Analyse der Gleichung:

$$x^5-3x^4-24x^3+95x^2-46x-101=0.$$

gesehen, daß zwischen den Grenzen 1 und 10 drei Wurzeln gesucht werden müssen, wovon die eine zuverlässig reell ist. Es handelt sich darum, zu bestimmen, ob die beiden andern Wurzeln wirklich existiren, oder ob die Gleichung zwei imaginäre Wurzeln hat. Diese Unterscheidung wird auf folgende Weise bewerkstelligt:

Die beiden zu vergleichenden Reihen sind:

	$f^{V}(x)$	$f^{IV}(x)$	$f'''(x)$	$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$
(1)	+	+	−	+	+	−
	120	48	156	30	65	78
	0	0	1	2	2	3
(10)	+	+	+	+	+	+
	120	1128	5136	15150	32654	54939

Die nach dem Verfahren in § 31. gebildete Reihe der Indices ist: 0 0 1 2 2 3. Da der letzte Inder 3 ist, so muß man auf das Intervall die Regel in § 35. anwenden. Unter die Zeichen sind die Zahlenwerthe der correspondirenden Functionen gesetzt.

Wenn man die Reihe der Indices von der Rechten nach der Linken vom letzten Gliede 3 durchläuft, so findet man, daß der erste Inder, welcher gleich 1 ist, der Function $f'''(x)$ entspricht. Auf dieses Glied 1 folgt 2 und 0 geht vorher. Diese drei auf einander folgenden Indices zeigen also, daß man auf die Functionen $f^{IV}(x)$, $f'''(x)$, $f''(x)$ die Regel des § 28. anwenden muß, welche zur Unterscheidung der imaginären Wurzeln dient. Man bilde die Quotienten $\frac{30}{145}$, $\frac{15150}{5136}$, und untersuche, ob einer derselben, oder ihre Summe der Differenz 9 der beiden Grenzen gleich ist, oder sie übersteigt. Da diese Bedingung nicht statt findet, so schließt man, daß die Grenzen 1 und 10 noch nicht hinreichend zusammengezogen sind, um die Natur der Wurzeln durch eine Operation bestimmen zu können. Man substituire also eine zwischenliegende Zahl; aber zuvor muß man, der ausgesprochenen Regel gemäß, untersuchen, ob die Functionen:

$$f''(x) = 20x^3 - 36x^2 - 144x + 190,\quad f'''(x) = 60x^2 - 72x - 144,$$

keinen gemeinschaftlichen Divisor haben. Da dieser gemeinschaftliche Factor nicht vorhanden ist, so substituire man in die Functionen eine zwischen 1 und 10 liegende, durch eine Ziffer ausgedrückte Zahl.

Die Substitution der Zahlen 2 und 3 gibt folgende Resultate, welche wir mit den Reihen (1) und (10) verbinden:

	$f^{V}(x)$	$f^{IV}(x)$	$f'''(x)$	$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$
(1)	+	+	−	+	+	−
	120	48	156	30	65	78
	0	0	0	1	0	0
(2)	+	+	−	−	+	−
	120	168	48	82	30	21
	0	0	1	0	1	2
(3)	+	+	+	−	−	−
	120	288	180	26	43	32

	0	0	0	1	1	1
(10).....	+	+	+	+	+	+
	120	1128	5136	15150	32654	54939

Die Vergleichung der Reihen (1) und (2) zeigt, daß zwischen den Grenzen 1 und 2 keine reelle Wurzel liegen kann; denn die beiden Reihen haben gleich viele Zeichenwechsel, welches auch aus der Reihe der Indices 0 0 0 1 0 0 folgt, weil der letzte Inder 0 ist. Folglich muß man die drei Wurzeln zwischen 2 und 10 suchen. Wenn man diese beiden Grenzen vergleicht, so findet man:

(2)	+	+	—	—	+	—
	0	0	1	1	2	3
(10)	+	+	+	+	+	+

Wenn man von dem letzten Inder 3 gegen die Linke fortgeht, und bei dem ersten Inder 1 stehen bleibt; so findet sich, daß der Inder 2 darauf folgt, welches nothwendig statt finden muß. Aber vor dem Inder 1 steht nicht 0; man muß folglich den Abstand von 2 bis 10 unmittelbar weiter zertheilen. Es ist daher die zwischen 2 und 10 liegende Zahl 3 substituirt. Die Vergleichung der beiden Reihen (2) und (3) zeigt, daß man die beiden Wurzeln zwischen diesen Grenzen suchen muß. Die Reihe der Indices ist: 0 0 1 0 1 2. Da der am nächsten nach dem Ende zur Rechten liegende Inder 1, 2 hinter sich und 0 vor sich hat, so folgt, daß man auf dieses Intervall die zur Distinction der imaginären Wurzeln dienende Regel anwenden muß. Da die Summe der Quotienten $\frac{21}{30}$, $\frac{32}{43}$ größer ist, als die Differenz 1 der beiden Grenzen, so ist es gewiß, daß die zwischen 2 und 3 anzeigten Wurzeln imaginär sind. In dem Zwischenraume von 3 bis 10, für welchen die Reihe der Indices 0 0 0 1 1 1 ist, hat die Gleichung eine einzige reelle Wurzel.

Also ist die Operation, welche die Bestimmung der Natur der Wurzeln und deren Grenzen zum Gegenstande hat, geschlossen.

Zwischen —10 und —1 liegt eine reelle Wurzel.

Eine zweite Wurzel liegt zwischen den Grenzen —1 und 0.

Zwischen 0 und 1 kann keine Wurzel liegen.

Dasselbe gilt von den Grenzen 1 und 2.

Die Gleichung hat 2 imaginäre Wurzeln zwischen 2 und 3.

Sie hat eine reelle Wurzel zwischen 3 und 10.

Die einzigen Intervalle, in welchen sich reelle und abgesonderte Wurzeln befinden, sind: das Intervall von —10 bis —1, das von —1 bis 0 und das von 3 bis 10.

§ 37. Das zweite Beispiel sei die § 13. angeführte Gleichung:

$$x^4 - 4x^3 - 3x + 23 = 0,$$

Man hat gesehen, daß die Vergleichung der Reihen (1) und (10) zwischen diesen Grenzen 2 Wurzeln anzeigt; und es kommt

darauf an, zu bestimmen: ob diese beiden Wurzeln reell sind, oder ob sie in dem Intervalle fehlen.

Die verglichenen Reihen sind:

$$\begin{array}{lccccc}
 & X^{IV} & X''' & X'' & X' & X, \\
(1) \ldots\ldots & + & \overset{-}{\underset{+}{0}} & - & - & + \\
 & 24 & 0 & 12 & 11 & 17 \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
(10) \ldots\ldots & + & + & + & + & + \\
 & 24 & 216 & 960 & 2797 & 5993
\end{array}$$

Unter die Zeichen sind die Zahlenwerthe gesetzt, und für das Zeichen 0 ist, der Bemerkung des § 11 gemäß, das doppelte Zeichen gesetzt. Die Reihe der Indices ist für dieses Intervall: 0 0 1 1 2. Das am nächsten nach dem Ende zur Rechten liegende Glied 1 ist das vorletzte; 2 folgt darauf, aber 0 geht nicht vorher. Man muß also den Abstand der Grenzen 1 und 10 zerlegen. Wenn man die Zahl 2 substituirt, so findet man folgende Resultate:

$$(2) \ldots \quad + \quad + \quad \overset{-}{\underset{+}{0}} \quad - \quad +.$$

Das dritte Resultat wird 0, welches die Anwendung des doppelten Zeichens nöthig macht. Aber die durch das untere Zeichen gegebene Reihe hat eben so viele Zeichenwechsel als die durch das obere Zeichen gegebene Reihe. Folglich fehlt in dem unendlich kleinen Intervalle von <2 bis >2 keine Wurzel.

Wenn man die Reihe (1) mit der Reihe (2) vergleicht, so sieht man, daß zwischen 1 und 2 keine Wurzel liegen kann; und wenn man die Reihen:

$$\begin{array}{lccccc}
 & X^{IV} & X''' & X'' & X' & X, \\
(>2) \ldots\ldots & + & + & + & - & + \\
 & 24 & 24 & 0 & 19 & 1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
(10) \ldots\ldots & + & + & + & + & + \\
 & 24 & 216 & 960 & 2797 & 5993
\end{array}$$

vergleicht; so findet man, daß zwischen 2 und 10 zwei Wurzeln angezeigt sind. Die Reihe der Indices ist: 0 0 0 1 2. Auf den am nächsten am rechten Ende liegenden Index $=1$ folgt 2, und 0 geht voran. Man muß also die zur Distinction der imaginären Wurzeln dienende Regel anwenden.

Bildet man die Quotienten $\frac{1}{19}$, $\frac{5993}{2797}$, so ergibt sich, daß die Summe dieser Zahlen kleiner ist, als die Differenz 8 der beiden Grenzen. Man muß also eine zwischen 2 und 10 liegende, und durch eine Ziffer ausgedrückte Zahl substituiren. Man muß sich

aber zuvor versichern, daß die Gleichung $X=0$ in dem fraglichen Intervalle keine 2 gleichen Wurzeln hat. Dieses ist nun aber nicht der Fall, weil die Functionen:

$$X = x^4 - 4x^3 - 3x + 23, \quad X' = 4x^3 - 12x^2 - 3$$

keinen gemeinschaftlichen Divisor haben. Substituirt man die zwischenliegende Zahl 3, so findet man:

$$\begin{array}{lccccc} (2) \ldots & + & + & + & - & + \\ (3) \ldots & + & + & + & - & - \\ (10) \ldots & + & + & + & + & + \end{array}$$

Folglich sind die Wurzeln, welche zwischen 1 und 10 angezeigt waren, reell. Sie sind durch die Substitution der Zahl 3 getrennt; die eine liegt zwischen 2 und 3, und die andere zwischen 3 und 10.

Also ist die Operation, welche die Bestimmung der Natur der Wurzeln der Gleichung:

$$x^4 - 4x^3 - 3x + 23 = 0$$

und der Grenzen derselben zum Gegenstande hat, vollendet.

Nach § 13. hat die Gleichung zwischen <0 und >0 zwei imaginäre Wurzeln; zwischen 0 und 1, und zwischen 1 und 2 kann keine Wurzel liegen.

Die Gleichung hat zwischen 2 und 3 eine reelle Wurzel, und eine zweite reelle Wurzel zwischen 3 und 10.

§ 38. Aus dem Vorhergehenden erhellet, daß sich die Bestimmung der Grenzen der reellen Wurzeln und die Distinction der imaginären Wurzeln auf die Anwendung zweier Hauptregeln reducirt. Die eine ist aus dem Theorem hergeleitet, welches die Veränderungen ausdrückt, die die Zeichenreihe erleidet, wenn die substituirte Zahl allmählich von $-\frac{1}{0}$ bis $+\frac{1}{0}$ wächst. (§§ 7, 8, 10.) Die zweite Regel gibt durch eine sehr leichte numerische Rechnung zu erkennen, ob die substituirte Zahl, welche eine der zwischenliegenden Functionen zu Null macht, der vorhergehenden und folgenden Function gleiche, oder entgegengesetzte Zeichen gibt (§§ 28, 31, 35). Die Operation, welche aus der Verbindung dieser beiden Regeln resultirt, gibt zuerst bloß die Intervalle an, in welchen die Wurzeln gesucht werden müssen, dann theilt sie diese Intervalle in mehrere andere, wovon jeder eine reelle Wurzel enthält. Um das Ganze dieser Operation besser zu übersehen, wollen wir die im Vorhergehenden aus einander gesetzten Regeln kurz wiederholen.

Wenn $X=0$ die gegebene Gleichung ist, so bildet man durch successive Differenzirungen die Reihe der Functionen $X, X', X'', X''', \ldots X^{(m-1)}, X^{(m)}$, welche in folgender Ordnung:

$$X^{(m)}, X^{(m-1)}, X^{(m-2)}, \ldots X'', X', X,$$

geschrieben werden, und substituirt für x in diese Reihe von Fun=

ctionen die Zahlen:

$$-1, \ -10, \ -100, \ -1000, \text{ etc.}$$
$$0$$
$$1, \quad 10, \quad 100, \quad 1000, \text{ etc.}$$

bis man zwei Reihen von Resultaten findet, die so beschaffen sind, daß die eine lauter Zeichenwechsel und die andere keinen enthält. Auf diese Weise findet man die Decimalgrenzen der Wurzeln, d. h. die Anzahl der Ziffern, wodurch sie ausgedrückt werden, wenn sie reell sind, und die verschiedenen Intervalle, in welchen diese Wurzeln gesucht werden müssen.

Für jedes der Partialintervalle, dessen Grenzen a und b sind, vergleiche man die Reihe (a) der Zeichen, welche die Substitution von a gibt, mit der Reihe (b), welche die Substitution der größern Grenze b gibt, auf folgende Weise: Man muß bemerken, wie viele Zeichenwechsel in jeder Reihe von dem ersten Gliede zur Linken bis zu einem beliebigen Gliede vorkommen, und nach der Regel in § 31. die diesem Intervalle entsprechende Reihe der Indices:

$$0 \ \delta \ \delta' \ \delta'' \ldots . \Delta$$

bilden. Wenn der letzte Index $\Delta = 0$ ist, so kann in dem Intervalle keine Wurzel liegen. Wenn der letzte Index $\Delta = 1$ ist, so enthält das Intervall nur eine reelle Wurzel. Die übrigen Wurzeln müssen in Intervallen gesucht werden, deren letzter Index 2, oder größer als 2 ist.

Wenn eins, oder mehrere Resultate der Substitutionen $= 0$ sind, so wendet man die in § 11. gegebene Regel des doppelten Zeichens an, und man findet durch die Vergleichung dieser Zeichen, ob die gegebene Gleichung in dem unendlich kleinen Intervalle der substituirten Werthe imaginäre Wurzeln hat, und die Anzahl dieser imaginären Wurzeln.

Betrachtet man ein Intervall, dessen Index 2, oder größer als 2 ist, so durchläuft man die Reihe der Indices von dem rechten Ende nach dem linken, bis man zum ersten Male den Index 1 findet, worauf immer 2 folgt. Der vor dem Index 1, bei welchem man stehen geblieben ist, vorhergehende Index kann 0, oder 1, oder 2 sein. Wenn er nicht 0 ist, so ist der Abstand der Grenzen a und b zu groß, um die Natur der Wurzeln unmittelbar unterscheiden zu können. Alsdann muß man nach der Bemerkung in § 34. eine zwischenliegende Zahl c von derselben Decimalordnung, als die Grenzen a und b, oder von der nächstfolgenden wählen, und sie in die Reihe der Functionen substituiren, um zwei Partialintervalle a und c, c und b zu bilden. Durch diese Substitutionen zwischenliegender Zahlen wird der am nächsten nach dem rechten Ende liegende Index 1 immer mehr nach diesem Ende fortgerückt, und der letzte Index Δ eines Intervalles wird nothwendig entweder 0, oder 1, oder es folgt auf den am nächsten am rechten Ende liegenden Index 1 der Index 2 und 0 geht vorher.

Wenn sich diese letzte Bedingung darbietet, so ist dieses ein

Zeichen, daß man die Regel anwenden muß, welche zur Unterscheidung der imaginären Wurzeln dient.

Sind

$$f^{(n+1)}(x), \quad f^{(n)}(x), \quad f^{(n-1)}(x)$$

die Functionen, welchen die auf einander folgenden Indices:

$$0 \quad 1 \quad 2$$

entsprechen; so untersucht man, ob die Zahlenwerthe der Resultate:

$$f^{(n+1)}(a), \; f^{(n)}(a), \; f^{(n-1)}(a)$$

und

$$f^{(n+1)}(b), \; f^{(n)}(b), \; f^{(n-1)}(b)$$

so beschaffen sind, daß, abgesehen vom Zeichen, einer der Quotienten:

$$\frac{f^{(n-1)}(a)}{f^{(n)}(a)}, \quad \frac{f^{(n-1)}(b)}{f^{(n)}(b)},$$

oder ihre Summe größer ist, als die Differenz $b - a$ der Grenzen und man verfährt bei dieser Vergleichung nach der § 28. gegebenen Regel. Durch die Anwendung dieser Regel ergibt sich, ob die beiden zwischen den fraglichen Grenzen angezeigten Wurzeln der Gleichung $f^{(n-1)}(x) = 0$ reell und ungleich, oder reell und gleich, oder imaginär sind.

Wenn diese Wurzeln reell und ungleich sind, so sind dieselben durch diese Operation getrennt; und auf dieselbe Weise verfährt man bei der Absonderung der Wurzeln in den übrigen Intervallen, deren letzter Index weder 0, noch 1 ist.

Sind hingegen die beiden Wurzeln der Gleichung $f^{(n-1)}(x) = 0$ imaginär, so muß man von dem Index 2 an, welcher der Function $f^{(n-1)}(x)$ entspricht, bis zu dem rechten Ende der Reihe von jedem Index zwei Einheiten abziehen, welches für dasselbe Intervall eine andere Reihe von Indices gibt, deren letzte Glieder kleiner sind, als in der vorhergehenden.

Wenn die beiden Wurzeln der Gleichung $f^{(n-1)}(x) = 0$ gleich sind, so untersucht man nach den bekannten Regeln, ob diese gleichen Wurzeln auch alle folgenden Functionen $f^{(n-2)}(x)$, $f^{(n-3)}(x), \ldots f(x)$ verschwinden machen. In diesem Falle fände man die gleichen Wurzeln, welche die Gleichung $f(x) = 0$ zwischen den gegebenen Grenzen hat. Wenn aber die Function $f^{(n-1)}(x)$ und alle auf sie zur Rechten folgenden Functionen keinen gemeinschaftlichen Factor haben; so sind die Folgerungen in Beziehung auf die Natur der Wurzeln genau dieselben, als wenn die beiden Wurzeln der Gleichung $f^{(n-1)}(x) = 0$ imaginär wären. Man zieht also von allen Indices, welche den Functionen $f^{(n-1)}(x)$, $f^{(n-2)}(x), \ldots f'(x)$, $f(x)$ entsprechen, zwei Einheiten ab, und wendet auf die neuen Reihen von Indices dieselben Regeln an, wenn es nöthig ist, bis die Wurzeln ganz abgesondert sind. Die Operation ist geschlossen, wenn nur noch Intervalle da sind, deren letzter Index $\Delta = 0$, oder $= 1$ ist.

§ 39. Als erstes Uebungsbeispiel der allgemeinen Regel wählen wir die Gleichung:

$$x^4 - x^3 + 4x^2 + x - 4 = 0.$$

Die Functionen, in welche man substituiren muß, sind:

$$X = x^4 - x^3 + 4x^2 + x - 4$$
$$X' = 4x^3 - 3x^2 + 8x + 1$$
$$X'' = 12x^2 - 6x + 8$$
$$X''' = 24x - 6$$
$$X^{IV} = 24.$$

Substituirt man die Zahlen:

$$-1,\ -10,\ -\ \text{etc.}$$
$$0$$
$$1,\quad 10,\quad \text{etc.}$$

so findet man:

	X^{IV}	X'''	X''	X'	X
(—10)....	+	—	+	—	+
(—1)	+	—	+	—	—
(0)	+	—	+	+	—
(1)	+	+	+	+	+

Alle Wurzeln müssen zwischen —10 und 1 gesucht werden, weil die Reihe (—10) lauter Zeichenwechsel, und die Reihe (1) keinen Zeichenwechsel hat. 1) Bildet man nach der Regel in § 31. die Reihe der Indices zwischen den Grenzen —10 und —1, so hat man:

(—10)....	+	—	+	—	+
	0	0	0	0	1
(—1)	+	—	+	—	—

In dieser Reihe 0 0 0 0 1 ist der letzte Index 1; folglich hat die Gleichung zwischen —10 und —1 nur eine reelle Wurzel, welche von allen andern abgesondert ist.

2) Vergleicht man die Reihen (—1) und (0), so sieht man, daß zwischen diesen Grenzen keine Wurzel gesucht werden muß, weil die beiden Reihen gleich viele Zeichenwechsel haben. Wenn man für diese beiden Reihen die Reihe der Indices bildet, so findet man:

(—1)....	+	—	+	—	—
	0	0	0	1	0
(0)	+	—	+	+	—;

folglich enthält das Intervall keine Wurzel.

3) Die zwei Reihen (0) und (1) geben für die Reihe der Indices:

	X^{IV}	X'''	X''	X'	X
(0)	+	−	+	+	−
	24	6	8	1	4
	0	1	2	2	3
(1)	+	+	+	+	+
	24	18	14	10	1

Es kommt nun darauf an, zur Trennung der Wurzeln fortzuschreiten, und zu bestimmen, ob sie alle drei reell sind, oder ob zwei davon imaginär sind. Man durchläuft die Reihe der Indices von dem letzten Gliede 3 zur Rechten gegen die Linke, bis man zum ersten Male den Index 1 findet; hier unter der Function X'''. Auf diesen Index folgt nothwendig 2, und da 0 vor ihm vorhergeht, so sieht man, daß die Bedingung der drei successiven Indices 0 1 2 erfüllt ist. Man muß also die Regel in § 28. zur Distinction der imaginären Wurzeln anwenden.

Wir haben unter jedes Zeichen die von den Substitutionen herrührenden Zahlenwerthe gesetzt. Die Functionen, welchen die drei Indices 0 1 2 entsprechen, sind: $f^{IV}(x)$, $f'''(x)$, $f''(x)$. Der Regel gemäß betrachtet man die Quotienten $\frac{8}{6}$, $\frac{14}{18}$, ohne Berücksichtigung ihrer Zeichen. Wenn einer derselben, oder ihre Summe größer ist, als die Differenz 1 der beiden Grenzen; so sind die in dem Intervalle angezeigten Wurzeln gewiß imaginär. Da nun diese Bedingung statt findet, so fehlen zwischen den Grenzen 0 und 1 zwei reelle Wurzeln der gegebenen Gleichung. Man muß nun, wie es die Regel vorschreibt, von dem letzten der auf einander folgenden Indices 0 1 2 an, von jedem Index 2 abziehen, wodurch man die neue Reihe der Indices bildet:

	X^{IV}	X'''	X''	X'	X
(0)					
	0	1	0	0	1
(1)					

Da der letzte Index der neuen Reihe 1 ist, so folgt, daß die gegebene Gleichung zwischen 0 und 1 nur eine reelle Wurzel hat, welche von den übrigen ganz abgesondert ist.

Die Operation der Distinction der Wurzeln ist vollendet, weil es kein Partialintervall mehr gibt, dessen letzter Index nicht 0 oder 1 wäre. Hieraus folgt, daß eine erste reelle Wurzel zwischen −10 und −1, eine zweite zwischen 0 und 1 liegt, und daß die beiden andern Wurzeln imaginär sind.

§ 40. Nach derselben Regel wollen wir die Gleichung:

$$x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$$

auflösen.

Hat man die Functionen:

$$X = x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1$$
$$X' = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x + 2$$
$$X'' = 20x^3 + 12x^2 + 6x - 4$$
$$X''' = 60x^2 + 24x + 6$$
$$X^{IV} = 120x + 24$$
$$X^{V} = 120$$

gebildet, so findet man:

	X^V	X^{IV}	X'''	X''	X'	X
(—1)....	+	—	+	—	+	—
		96	42	18	10	2
	0	1	2	2	2	2
(0)	+	+	+	—	+	—
		24	6	4	2	1
	0	0	0	1	2	3
(1)	+	+	+	+	+	+
		144	90	36	10	2

Wir haben unter jedes Zeichen die Zahlenwerthe, und die jedem Intervall zugehörige Reihe der Indices gesetzt, und aus der Vergleichung der Reihen ergeben sich nachstehende Folgerungen:

1) Alle Wurzeln müssen zwischen —1 und +1 gesucht werden, weil die Reihe (—1) fünf Zeichenwechsel hat, und die Reihe (1) keinen.

2) Zwischen —1 und 0 werden 2 Wurzeln angezeigt. Da der letzte Inder 2 ist, so muß man in der Reihe der Indices von der Rechten gegen die Linke so weit fortgehen, bis man zum ersten Male 1 findet. Dieser Inder 1 entspricht der Function X^{IV}, 2 folgt darauf und 0 geht vorher. Man wendet also die Regel in § 28 auf die drei Functionen X^V, X^{IV}, X''' an, welchen die drei auf einander folgenden Indices 0 1 2 entsprechen. Man muß untersuchen, ob einer der Quotienten $\frac{42}{96}$, $\frac{6}{24}$, oder ihre Summe größer ist, ohne Rücksicht auf das Zeichen, als die Differenz 1 der beiden Grenzen 0 und —1, oder ihr wenigstens gleich. Da diese Bedingung nicht statt findet, so folgt, daß die Grenzen —1 und 0 noch nicht genug zusammengezogen sind, um durch eine einzige Operation unterscheiden zu können, ob die beiden angezeigten Wurzeln reell, oder imaginär sind. Man muß also dieses Intervall zertheilen. Aber ehe man zur Substitution einer zwischenliegenden Zahl schreitet, muß man sich nach der Regel in § 28 versichern, daß die Gleichung

$X''' = 0$ zwischen -1 und 0 keine zwei gleichen Wurzeln hat. Wenn dieses der Fall wäre, so hätten die beiden Functionen:

$$X''' = 60x^2 + 24x + 6\,,\quad X^{IV} = 120x + 24$$

einen gemeinschaftlichen Factor, und da dieser Factor nicht existirt, so ist der Fall der gleichen Wurzeln ausgeschlossen.

Man muß also eine zwischen -1 und 0 liegende Zahl von der nächstfolgenden Decimalordnung, d. h. welche durch **eine** Decimalziffer ausgedrückt wird, substituiren. Substituirt man $-0,5$, so erhält man:

$(-1)\ldots$	+	−	+	−	+	−
$(-\frac{1}{2})\ldots$	+	−	+	−	+	−
		36	9	$\frac{52}{8}$	$\frac{73}{16}$	$\frac{83}{32}$
	0	1	2	2	2	2
$(0)\ldots$	+	+	+	−	+	−
		24	6	4	2	1

Das erste Partialintervall von -1 bis $-\frac{1}{2}$ kann keine Wurzel enthalten, weil die Zeichen beider Reihen dieselben sind. Für das zweite Partialintervall ist die Reihe der Indices 0 1 2 2 2 2. Da auf den am nächsten am rechten Ende liegenden Index 1 der Index 2 folgt und 0 vor ihm vorhergeht, so muß man nach der Regel in § 28 die Zahlenwerthe der Quotienten $\frac{9}{36}$, $\frac{6}{24}$ betrachten, um zu erkennen, ob einer dieser Quotienten, oder ihre Summe größer ist als die Differenz $\frac{1}{2}$ der beiden Grenzen, oder ihr wenigstens gleich. Da diese Bedingung statt findet, so ist gewiß, daß die beiden, in dem Intervalle von $-\frac{1}{2}$ bis 0 angezeigten Wurzeln imaginär sind.

Es ist nur noch das Intervall von 0 bis $+1$ übrig, in welchem 3 Wurzeln angezeigt sind, und es kommt darauf an, zu bestimmen, ob diese 3 Wurzeln reell sind, oder ob 2 davon imaginär sind. Zu diesem Zwecke braucht man nur dieselbe Regel auf dieses Intervall anzuwenden:

	X^{V}	X^{IV}	X'''	X''	X'	X
$(0)\ldots$	+	+	+	−	+	−
		24	6	4	2	1
	0	0	0	1	2	3
$(1)\ldots$	+	+	+	+	+	+
		144	90	36	10	2

Man sieht, daß in der Reihe der Indices 0 0 0 1 2 3 vor dem am nächsten zur Rechten liegenden Index 1, 0 vorhergeht. Da die Bedingung der drei successiven Indices 0 1 2 statt findet, so bildet man die Quotienten $\frac{2}{4}$, $\frac{10}{36}$, um zu sehen, ob einer derselben,

oder ihre Summe größer ist, als die Differenz 1 der beiden Grenzen, oder ihr gleich. Da diese Bedingung nicht statt findet, so folgt, daß die Grenzen 0 und 1 einander noch nicht nahe genug liegen, um die Natur der Wurzeln durch eine einzige Operation unterscheiden zu können.

Man muß folglich eine zwischen 0 und 1 liegende, und durch eine Decimalziffer ausgedrückte Zahl substituiren. Aber ehe man diese Substitution vornimmt, muß man sich versichern, daß die Gleichung $X'=0$ zwischen 0 und 1 keine gleichen reellen Wurzeln hat. Dieses ist aber gewiß, weil die Polynome:

$$X'=5x^4+4x^3+3x^2-4x+2,\quad X''=20x^3+12x^2+6x-4$$

keinen gemeinschaftlichen Factor haben.

Substituirt man die zwischenliegende Zahl 0, 5, so erhält man folgende Resultate:

	X^{V}	X^{IV}	X'''	X''	X'	X
(0)	+	+	+	−	+	−
		24	6	4	2	1
	0	0	0	1	2	2
($\frac{1}{2}$)	+	+	+	+	+	−
		84	33	$\frac{9}{2}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{9}{32}$
(1)	+	+	+	+	+	+

Das Intervall zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 enthält eine einzige reelle Wurzel, welche ganz abgesondert ist. In dem Partialintervalle von 0 bis $\frac{1}{2}$ sind zwei Wurzeln angezeigt. Da die Reihe der Indices 0 0 0 1 2 2 die Bedingung der drei successiven Indices 0 1 2 erfüllt, so bildet man die Quotienten $\frac{2}{4}$, $\frac{25}{16}:\frac{9}{2}$, um zu sehen, ob einer dieser Quotienten, oder ihre Summe größer ist, als die Differenz $\frac{1}{2}$ der beiden Grenzen, oder ihr gleich. Da diese Bedingung erfüllt wird, so schließt man mit Gewißheit, daß die beiden zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ angezeigten Wurzeln imaginär sind. Wenn man von dem Gliede 2 an, dem letzten der drei successiven Indices 0 1 2, 2 abzieht, so erhält man zur neuen Reihe der Indices: 0 0 0 1 0 0. Folglich hat die gegebene Gleichung eine einzige reelle Wurzel zwischen 0, 5 und 1, und die übrigen 4 Wurzeln sind imaginär.

§ 41. Als drittes Beispiel sei die Gleichung zu lösen:

$$x^6-12x^5+60x^4+123x^2+4567x-89012=0,$$

so hat man die Functionen:

$$X=x^6-12x^5+60x^4+123x^2+4567x-89012$$

$$X'=6x^5-60x^4+240x^3+246x+4567$$

$$X''=30x^4-240x^3+720x^2+246$$

$$X''' = 120x^3 - 720x^2 + 1440x$$
$$X^{iv} = 360x^2 - 1440x + 1440$$
$$X^{v} = 720x - 1440$$
$$X^{vi} = 720,$$

und wenn man die Zahlen:

$$-1,\ -10,\ \text{etc.}$$
$$0$$
$$1,\quad 10,\ \text{etc.}$$

substituirt; so findet man folgende Resultate:

	X^{vi}	X^{v}	X^{iv}	X'''	X''	X'	X
(−10)	+	−	+	−	+	−	+
(−1)	+	−	+	−	+	−	−
(0)	+	−	+	$\overset{-}{\underset{+}{0}}$	+	+	−
(1)	+	−	+	+	+	+	−
		720	360				
	0	1	2	2	2	2	3
(10)	+	+	+	+	+	+	+
		5760	23040				

Hieraus sieht man, daß alle Wurzeln zwischen den Grenzen -10 und $+10$ gesucht werden müssen, weil die Reihe (-10) sechs Zeichenwechsel hat, und die Reihe (10) keinen.

Die Vergleichung der Reihen (<0) und (>0) zeigt, daß zwischen den Grenzen <0 und >0 zwei imaginäre Wurzeln liegen.

Da die Reihe (-1) fünf, und die Reihe (-10) sechs Zeichenwechsel hat, so liegt eine reelle Wurzel der Gleichung zwischen -10 und -1.

Die Reihen (-1) und (<0) haben eine gleiche Anzahl von Zeichenwechseln; es kann also zwischen -1 und 0 keine Wurzel liegen. Dasselbe gilt von den Reihen (>0) und (1). Zwischen den Grenzen 0 und 1 darf also keine Wurzel gesucht werden.

Es bleibt noch das Intervall der Grenzen 1 und 10 übrig, in welchem 3 Wurzeln angezeigt sind. Die diesem Intervalle entsprechende Reihe der Indices ist:

$$0\ \ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 3.$$

Der erste Inder $=1$ zur Rechten liegt zwischen 0 und 2. Diese drei auf einander folgenden Indices 0 1 2 zeigen, daß man die Regel in § 28 unmittelbar anwenden muß. Man bildet also die Quotienten $\frac{360}{720}$, $\frac{23040}{5760}$, um zu sehen, ob einer dieser Quotienten

oder ihre Summe die Differenz 9 der beiden Grenzen übersteigt, oder ihr gleich ist. Da diese Bedingung nicht statt findet, so folgt, daß der Abstand der Grenzen 1 und 10 noch zu groß ist, als daß die Natur der Wurzeln durch eine Operation bestimmt werden könnte. Aber vor der Zertheilung des Intervalles muß man untersuchen, ob die beiden Functionen X^{IV} und X^{V}, welche den beiden letzten der drei Indices 0 1 2 entsprechen, keinen gemeinschaftlichen Factor haben, und ob dieser Factor nicht durch einen zwischen den Grenzen liegenden Werth von x zu Null gemacht wird. Die Vergleichung der Functionen:

$$X^{IV}=360\,x^2-1440\,x+1440\;,\; X^{V}=720\,x-1440$$

zeigt, daß sie den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{2}x-1$ haben, und daß dieser Factor durch den, zwischen 1 und 10 liegenden Werth 2 zu Null gemacht wird. Dieser Factor ist nicht allen folgenden Functionen X''', X'', X', X gemein, woraus der Regel in § 35 gemäß folgt, daß zwischen 1 und 10 zwei Wurzeln der gegebenen Gleichung imaginär sind. Man zieht also von dem letzten der drei auf einander folgenden Indices 0 1 2 an, von jedem Index 2 ab, und man erhält für die neue Reihe der Indices des Intervalles von 1 bis 10:

0 1 0 0 0 0 1.

Also ist die Sonderung der Wurzeln beendigt. Die gegebene Gleichung hat eine reelle Wurzel zwischen -10 und 1; zwei imaginäre Wurzeln in dem unendlich kleinen Intervalle zwischen <0 und >0; zwei andere imaginäre Wurzeln zwischen 1 und 10; endlich hat die Gleichung in demselben Intervalle eine zweite, gänzlich gesonderte reelle Wurzel.

§ 42. Um die Verschiedenheit der Fälle und den Gebrauch der Regel besser übersehen zu können, wollen wir alle in den vorhergehenden Paragraphen vorkommenden Beispiele in eine Uebersicht zusammenstellen.

Seite. §.

263 (12) $X = x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101 = 0$

286 (36) $X' = 5x^4 - 12x^3 - 72x^2 + 190x - 46$

$X'' = 20x^3 - 36x^2 - 144x + 190$

$X''' = 60x^2 - 72x - 144$

$X^{IV} = 120x - 72$

$X^{V} = 120.$

	X^{V}	X^{IV}	X'''	X''	X'	X	
(−10)	+	−	+	−	+	−	eine Wurzel
(−1)	+	−	+	−	+	+	eine Wurzel
(0)	+	−	−	+	−	−	
(1)	+	+	−	+	+	−	
(2)	+	+	−	−	+	−	
					30	21	zwei angez. Wurzeln
				0	1	2	$\frac{21}{30}+\frac{32}{43}>1$, imag. W.
(3)	+	+	+	−	−	−	
					43	32	eine Wurzel
(10)	+	+	+	+	+	+	

264 (13) $X = x^4 - 4x^3 - 3x + 23 = 0$

286 (37) $X' = 4x^3 - 12x^2 - 3$

$X'' = 12x^2 - 24x$

$X''' = 24x - 24$

$X^{IV} = 24$

	X^{IV}	X'''	X''	X'	X	
						zwei imag. Wurzeln
(0)	+	−	$\overset{+}{\underset{-}{0}}$	−	+	Regel des doppelten Zeichens
(1)	+	$\overset{-}{\underset{+}{0}}$	−	−	+	
(2)	+	+	$\overset{-}{\underset{+}{0}}$	−	+	eine Wurzel
(3)	+	+	+	−	−	eine Wurzel
(10)	+	+	+	+	+	

Seite. §

266 (14) $X = x^3 + 2x^2 - 3x + 2 = 0$

$X' = 3x^2 + 4x - 3$

$X'' = 6x + 4$

$X''' = 6$

	X'''	X''	X'	X	
(−10)	+	−	+	−	eine Wurzel
(−1)	+	−	−	+	
(0)	+	+	−	+	
			3	2	zwei angez. Wurzeln
		0	1	2	
(1)	+	+	+	+	$\frac{2}{3}+\frac{2}{4}>1$, imag.
			4	2	

293 (39) $X = x^4 - x^3 + 4x^2 + x - 4 = 0$

$X' = 4x^3 - 3x^2 + 8x + 1$

$X'' = 12x^2 - 6x + 8$

$X''' = 24x - 6$

$X^{IV} = 24$

	X^{VI}	X'''	X''	X'	X	
(−10)	+	−	+	−	+	
(−1)	+	−	+	−	−	eine Wurzel
(0)	+	−	+	+	−	
		6	8			
	0	1	2	2	3	drei angez. Wurzeln
(1)	+	+	+	+	+	$\frac{8}{6}>1$, zwei imag. Wurzeln
		18	14			

Seite §.

297 (41) $X = x^6 - 12x^5 + 60x^4 + 123x^2 + 4567x - 89012 = 0$

$X' = 6x^5 - 60x^4 + 240x^3 + 246x + 4567$

$X'' = 30x^4 - 240x^3 + 720x^2 + 246$

$X''' = 120x^3 - 720x^2 + 1440x$

$X^{IV} = 360x^2 - 1440x + 1440$

$X^{V} = 720x - 1440$

$X^{VI} = 720$

	X^{VI}	X^{V}	X^{VI}	X'''	X''	X'	X	
(—10)	+	—	+	—	+	—	+	eine Wurzel
(—1)	+	—	+	—	+	—	—	zwei imag. Wurzeln
(0)	+	—	+	$\overset{-}{\underset{+}{0}}$	+	+	—	Regel des doppelten Zeichens
(1)	+	—	+	+	+	+	—	drei angez. Wurzeln
	0	1	2	2	2	2	3	zwei imag. Wurzeln
(10)	+	+	+	+	+	+	+	

X^{IV} hat 2 gleiche Wurzeln, welches keine Wurzeln von X sind.

266 (15) $X = x^5 + x^4 + x^2 - 25x - 36 = 0$

280 (30) $X' = 5x^4 + 4x^3 + 2x - 25$

$X'' = 20x^3 + 12x^2 + 2$

$X''' = 60x^2 + 24x$

$X^{IV} = 120x + 24$

$X^{V} = 120$

	X^{V}	X^{IV}	X'''	X''	X'	X	
(—10)	+	—	+	—	+	—	eine Wurzel
(—2)	+	—	+	—	+	+	eine Wurzel
(—1)	+	—	+	—	—	—	zwei imag. Wurzeln
(0)	+	+	$\overset{-}{\underset{+}{0}}$	+	—	—	Regel des doppelten Zeichens
(1)	+	+	+	+	—	—	eine Wurzel
(10)	+	+	+	+	+	+	

Seite. §.

268 (17) $X = x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$

$X' = 7x^6 - 10x^4 - 9x^2 + 8x - 5$

$X'' = 42x^5 - 40x^3 - 18x + 8$

$X''' = 210x^4 - 120x^2 - 18$

$X^{IV} = 840x^3 - 240x$

$X^{V} = 2520x^2 - 240$

$X^{VI} = 5040x$

$X^{VII} = 5040$

	X^{VII}	X^{VI}	X^{V}	X^{IV}	X'''	X''	X'	X	
(−10)	+	−	+	−	+	−	+	−	
									eine Wurzel
(−1)	+	−	+	−	+	+	−	+	
									zwei imag. Wurzeln Regel des doppelten Zeichens
(0)	+	$\overset{-}{\underset{+}{0}}$	−	$\overset{+}{\underset{-}{0}}$	−	+	−	+	
									zwei imag. Wurzeln
(1)	+	+	+	+	+	−	−	+	
									zwei angez. Wurzeln
(10)	+	+	+	+	+	+	+	+	

270 (18) $X = x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x - 2 = 0$

$X' = 5x^4 + 12x^3 + 6x^2 - 6x - 2$

$X'' = 20x^3 + 36x^2 + 12x \ - 6$

$X''' = 60x^2 + 72x + 12$

$X^{IV} = 120x + 72$

$X^{V} = 120$

	X^{V}	X^{V}	X'''	X''	X'	X	
							zwei imag. Wurzeln Regel des doppelten Zeichens
(−1)	+	−	$\overset{+}{\underset{-}{0}}$	−	+	−	
							zwei imag. Wurzeln
(0)	+	+	+	−	−	−	
(1)	+	+	+	+	+	−	
							eine Wurzel
(10)	+	+	+	+	+	+	

Seite. §.

271 (19) $X = x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0$

$X' = 5x^4 - 30x^2 + 6$

$X'' = 20x^3 - 60x$

$X''' = 60x^2 - 60$

$X^{IV} = 120x$

$X^{V} = 120$

	X^{V}	X^{IV}	X'''	X''	X'	X	
(−10)	+	−	+	−	+	−	
							eine Wurzel
(−1)	+	−	$\overset{+}{\underset{-}{0}}$	+	−	+	
							zwei angez. Wurzeln
(0)	+	$\overset{-}{\underset{+}{0}}$	−	$\overset{+}{\underset{-}{0}}$	+	+	
							eine Wurzel
(1)	+	+	$\overset{-}{\underset{+}{0}}$	−	−	−	
							eine Wurzel
(10)	+	+	+	+	+	+	

294 (40) $X = x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$

$X' = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x + 2$

$X'' = 20x^3 + 12x^2 + 6x - 4$

$X''' = 60x^2 + 24x + 6$

$X^{IV} = 120x + 24$

$X^{V} = 120$

	X^{V}	X^{IV}	X'''	X''	X'	X	
(−1)	+	−	+	−	+	−	
(−½)	+	−	+	−	+	−	zwei angez. Wurzeln
		36	9				
	0	1	2	2	2	2	$\frac{9}{36} + \frac{6}{24} = \frac{1}{2}$, imag.
(0)	+	+	+	−	+	−	
		24	6	4	2		
							zwei angez. Wurzeln
	0	0	0	1	2	2	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, imaginär
(½)	+	+	+	+	+	−	
				36	10		
							eine Wurzel
(1)	+	+	+	+	+	+	

Zweiter Abschnitt.

Methode zur Berechnung der Werthe der Wurzeln, deren Grenzen bekannt sind, nebst Bemerkungen über die Convergenz der Approximationen und über die Distinction der Wurzeln.

---

§ 1. Man kennt zwei Grenzen a und b, zwischen welchen eine reelle Wurzel einer algebraischen Gleichung:

$$f(x) = 0$$

liegt, und man weiß gewiß, daß in diesem Intervalle keine andere Wurzel liegen kann. Man soll Werthe bestimmen, welche sich dieser Wurzel immer mehr und mehr nähern, um alle Ziffern zu kennen, wodurch dieselbe ausgedrückt wird, wenn die Anzahl dieser Ziffern begrenzt ist, oder so viele genaue Ziffern, als man für nöthig hält.

Das zur Erleichterung der Berechnung der Wurzeln am meisten geeignete Approximationsverfahren ist das allgemein bekannte newtonsche, welches darin besteht: daß man in den ersten Theil $f(x)$ der Gleichung $a + x'$ für x substituirt, wo a den ersten genäherten Werth der Wurzel bezeichnet, und in dem Resultate die Glieder wegläßt, welche höhere Potenzen als die erste von x' enthalten, wodurch man zur Bestimmung von x' eine Gleichung des ersten Grades erhält. Addirt man den aus dieser Gleichung erhaltenen Werth von x' zu dem ersten Näherungswerthe a, so findet man einen mehr genäherten Werth a', und man wendet diesen zweiten Näherungswerth a' an, um durch dasselbe Verfahren einen dritten a'' zu finden. Man kann die Anwendung dieser Regel beliebig weit fortsetzen, und man erhält Werthe, welche sehr schnell gegen die gesuchte Wurzel convergiren. Diese Methode läßt sich unter verschiedenen Formen darstellen. Wir betrachten sie als ein Fundamentalelement der Analysis, und es ist von Wichtigkeit, alle Vorzüge derselben zu erhalten. Aber sie unterliegt in der Anwendung besonderen Schwierigkeiten, welche sorgfältig untersucht und vollständig gehoben werden müssen.

Die erste Bedingung, welche die Anwendung dieser Methode fordert, besteht darin, einen ersten genäherten Werth der Wurzel zu finden. Diese Aufgabe ist durch unsere Methode bereits gelöst, weil

wir für jede reelle Wurzel zwei Grenzen a und b kennen, zwischen welchen sie allein liegt. Allein es bleiben noch mehrere andere Bedingungen zu erfüllen, ohne welche die Operation unrichtig werden könnte und immer unklar bleiben würde. Wir wollen diese Bedingungen zuvörderst aussprechen, und dann die Regeln beweisen, welche man befolgen muß, um ihnen Genüge zu leisten.

§ 2. 1) Obgleich zwischen den gegebenen Grenzen a und b nur eine Wurzel liegt, so können sie doch, wie wir später sehen werden, einander nicht hinreichend genähert sein, um sogleich zur approximativen Berechnung fortschreiten zu können. In diesem Falle könnte man die Grenzen verengen, indem man das Intervall weiter zertheilte; allein es ist durchaus nothwendig, ein bestimmtes Merkmal zu haben, woran sich erkennen läßt, ob man zu hinreichend engen Grenzen gelangt ist.

2) Wie klein der Abstand der Grenzen immer sein mag, so kann doch das Approximationsverfahren nur auf eine der Grenzen mit Zuverlässigkeit angewandt werden, und nicht auf die andere. Man muß also diejenige Grenze unterscheiden, welche gewählt werden muß.

3) Die successiven Resultate, welche man erhält, sind Werthe, die sich der gesuchten Wurzel beständig nähern; aber wir werden bald zeigen, daß diese Werthe nicht abwechselnd größer und kleiner sind, als die Wurzel. Diese Eigenschaft, welche andern Näherungsmethoden eigen ist, findet bei der Anwendung der newtonschen Methode niemals statt. Die successiven, genäherten Werthe a, a′, a″, a‴, ... sind alle größer, oder alle kleiner als die Wurzel. Man weiß also nicht, wie viele genaue Ziffern jede Operation gibt, und diese Ungewißheit ist der Hauptgrund der Unvollkommenheit der Methode. Man könnte ohne Zweifel den genäherten Werth so lange sich ändern lassen, bis die Substitution in $f(x)$ das entgegengesetzte Zeichen von dem gäbe, welches man zuerst gefunden hatte; aber diese Substitutionen würden viele Rechnungen erfordern, und wenn man so verfahren wollte, so würde der Hauptvorzug der Methode, die schnelle Annäherung, verloren gehen. Wir werden diese Schwierigkeit dadurch beseitigen, daß wir andere Grenzen b, b′, b″, b‴, ... angeben, welche kleiner sind, als die Wurzel, wenn die vorhergehenden a, a′, a″, a‴, ... größer sind, und welche dagegen größer sind, als die Wurzel, wenn die vorhergehenden kleiner sind. Alsdann werden die beiden Grenzen gemeinschaftlichen Ziffern der gesuchten Wurzel angehören, welche daher allein als genau beibehalten werden. Wir werden beweisen, daß die Anzahl der genauen Ziffern, welche jede Operation gibt, nach der geometrischen Progression 2, 4, 8, 16, ... wächst. Hieraus leiten wir eine zuverlässige Regel ab, nach welcher man zum Voraus, und unabhängig von der Berechnung der zweiten Grenzen, bestimmen kann, wie weit man die Annäherung der ersten Grenzen treiben kann.

4) Man muß den Calcul so ordnen, daß darin keine überflüssigen Operationen vorkommen; d. h. daß man nur solche Operationen zu verrichten habe, die zur Bestimmung der Wurzeln durchaus erforderlich sind.

Wir wollen nun diese verschiedenen Aufgaben successive lösen und genauer untersuchen.

§ 3. Zwischen den durch unsere Methode bestimmten Grenzen a und b liegt eine reelle Wurzel α der Gleichung $f(x)=0$, und man ist gewiß, daß in diesem Intervalle keine andere Wurzel der Gleichung liegt, weil die Reihe (a) der Resultate der Substitution von a in die Functionen $f^{(n)}(x)$, $f^{(n-1)}(x) \ldots f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$ nur einen Zeichenwechsel mehr hat, als die Reihe (b) der Resultate der Substitution der größern Grenze b in dieselben Functionen. Läßt man in der Reihe (a) die beiden letzten Resultate $f'(a)$, $f(a)$ und in der Reihe (b), $f'(b)$, $f(b)$ weg, so ergibt sich aus der Vergleichung beider Reihen, ob die Gleichung $f''(x)=0$ zwischen denselben Grenzen a und b Wurzeln haben kann. Wenn nun in diesem Intervalle solche Wurzeln, d. h. Werthe von x, welche die Function $f''(x)$ zu Null machen, existiren; so ist jeder dieser Werthe verschieden von dem Werthe α, welcher die Gleichung $f(x)=0$ auflöst. Nur der besondere Fall, wo die Functionen $f''(x)$ und $f(x)$ einen gemeinschaftlichen Divisor $\psi(x)$ haben, macht eine Ausnahme. Durch Anwendung des gewöhnlichen Verfahrens läßt sich leicht entscheiden, ob dieser Factor $\psi(x)$ existirt, und in diesem speciellen Falle müßte man die Gleichung $\psi(x)=0$ besonders auflösen. Man würde also die zur Bestimmung der Wurzeln dienenden Regeln auf die Gleichung $\psi(x)=0$ und nicht auf die zusammengesetztere Gleichung $f(x)=0$ anwenden.

Wenn dieser gemeinschaftliche Factor $\psi(x)$ nicht vorhanden ist, so ist jeder Werth, welcher die Function $f''(x)$ zu Null macht, verschieden von der Wurzel α der Gleichung $f(x)=0$. Man kann folglich die beiden Grenzen a und b mehr zusammenziehen, und dafür zwei andere a' und b' an die Stelle setzen, welche einander so nahe sind, daß zwischen ihnen zwar immer die Wurzel α der Gleichung $f(x)=0$, aber keine Wurzel der Gleichung $f''(x)=0$ liegt. Um diese neuen Grenzen a' und b' zu erhalten, theilt man das Intervall der beiden ersten Grenzen a und b, indem man eine zwischenliegende Zahl c substituirt; und alsdann ergibt sich, ob die gesuchte Wurzel α zwischen a und c oder zwischen c und b liegt.

Auf dieselbe Weise kann man die beiden Functionen $f'(x)$ und $f(x)$ vergleichen. Wenn sie einen gemeinschaftlichen Factor $\varphi(x)$ hätten, welches der Fall der gleichen Wurzeln ist; so würde man die Gleichung $\varphi(x)=0$ besonders auflösen. Wenn dieser Factor $\varphi(x)$ nicht existirt, oder wenn die Gleichung $\varphi(x)=0$ zwischen den Grenzen a und b keine Wurzel γ hat; so kann man diese Grenzen durch Zertheilung des Intervalles zusammenziehen, und andere, einander näherliegende Grenzen a' und b' finden, welche so beschaffen sind, daß die Gleichung $f(x)=0$ zwischen ihnen e i n e Wurzel, die Gleichung $f'(x)=0$ aber keine hat.

Hieraus folgt, daß die beiden gegebenen Grenzen a und b bei der Berechnung des Werthes einer Wurzel immer so vorausgesetzt werden können, daß, indem die Gleichung $f(x)=0$ zwischen a und b e i n e reelle Wurzel hat, die Gleichungen $f'(x)=0$ und $f''(x)=0$ in diesem Intervalle keine Wurzeln haben.

§ 4. Auf folgende Weise läßt sich leicht erkennen, ob diese beiden Bedingungen erfüllt werden. Denn die Resultate der Substitutionen von a und b in die Functionen $f^{(n)}(x)$, $f^{(n-1)}(x)$, ... $f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$ sind durch die Operationen, welche zur Bestimmung der Grenzen dienten, bereits bekannt, und die dem Intervalle entsprechende Reihe der Indices ist gebildet. Man untersucht, ob, indem der letzte Index $\Delta = 1$ ist, die beiden vorhergehenden Indices 0, 0 sind. Wenn dieses der Fall ist, so haben die beiden Gleichungen $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ zwischen a und b gewiß keine Wurzeln, und wir werden zeigen, daß man in diesem Falle die Annäherungsmethode mit Zuverlässigkeit anwenden kann. Wenn aber die drei letzten Indices nicht 0 0 1 sind, so muß man das Intervall so lange verkleinern, bis diese Bedingung erfüllt wird, oder wenn dieses nöthig ist, die mit $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ bezeichneten gemeinschaftlichen Factoren besonders betrachten.

Wenn die beiden verglichenen Reihen:

$$f^{(m)}(a),\ f^{(m-1)}(a), \ldots f''(a),\ f'(a),\ f(a),$$

$$f^{(m)}(b),\ f^{(m-1)}(b), \ldots f''(b),\ f'(b),\ f(b),$$

so beschaffen sind, daß mit Weglassung der letzten Resultate $f(a)$, $f(b)$ in beiden die Zeichen dieselben sind, so werden die vorhergehenden Bedingungen offenbar erfüllt; denn die mit $f'(a)$ schließende Reihe hat alsdann offenbar eben so viele Zeichenwechsel als die mit $f'(b)$ schließende; und dasselbe gilt von den beiden Reihen, welche sich mit $f''(a)$ und $f''(b)$ schließen. Wenn sich also die beiden Reihen (a) und (b) bloß durch das letzte Zeichen unterscheiden, so ist nichts weiter übrig, als zur Berechnung der Wurzel fortzuschreiten. In dem folgenden § werden wir sehen, daß dieser Zustand der beiden Reihen nicht ein besonderer Fall, sondern vielmehr der allgemeine ist, weswegen die beiden Reihen in diesem Falle mit Aufmerksamkeit betrachtet werden müssen. Wenn dieser Fall nicht statt findet, so kann man ihn durch Zusammenziehung der Grenzen immer herstellen.

Wenn z. B. die Gleichung:

$$f(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

gegeben ist, so findet man, daß die Zahlen 0 und 10 in die Reihe der Functionen:

$$f^{v}(x),\ f^{iv}(x),\ f'''(x),\ f''(x),\ f'(x),\ f(x)$$

substituirt, folgende Resultate geben:

(0)	+	+	+	−	−	−
	0	0	0	1	1	1
(10)	+	+	+	+	+	+

Zwischen den Grenzen 0 und 10 liegt eine einzige Wurzel; aber diese Grenzen sind noch nicht genug zusammengezogen, damit die

Gleichungen $f''(x)=0$ und $f'(x)=0$ in diesem Intervalle keine Wurzel haben; denn aus der Reihe der Indices 0 0 0 1 1 1 erhellet, daß die Gleichung $f''(x)=0$ sowohl, als die Gleichung $f'(x)=0$ zwischen 0 und 10 eine Wurzel hat. Man muß folglich eine zwischen 0 und 10 liegende Zahl substituiren. Es sei 1 diese Zahl, so findet man folgende Resultate:

(1)	+	+	+	+	+	−
	0	0	0	0	0	1
(10)	+	+	+	+	+	+

Die gesuchte Wurzel liegt also zwischen 1 und 10, und diese Grenzen sind so beschaffen, daß die Gleichungen $f'(x)=0$ und $f''(x)=0$ in diesem Intervalle keine Wurzeln haben, wie aus der Reihe der Indices 0 0 0 0 0 1 erhellet.

§ 5. Wir wollen nun zwei Lehnsätze beweisen, welche bei der Berechnung der Grenzen und der Werthe der Wurzeln häufig gebraucht werden.

1) Wenn die beiden Reihen:

$$(a) \ldots f^{(m)}(a),\ f^{(m-1)}(a), \ldots f''(a),\ f'(a),\ f(a)$$

$$(b) \ldots f^{(m)}(b),\ f^{(m-1)}(b), \ldots f''(b),\ f'(b),\ f(b)$$

so beschaffen sind, daß jedes Glied der ersten Reihe dasselbe Zeichen hat, als das correspondirende der zweiten; so findet dieselbe Bedingung statt, wenn man in die Functionen für x irgend eine, zwischen a und b liegende Zahl c substituirt; d. h. jedes Glied der Reihe:

$$(c) \ldots f^{(m)}(c),\ f^{(m-1)}(c), \ldots f''(c),\ f'(c),\ f(c)$$

hat dasselbe Zeichen, als die correspondirenden Glieder der Reihen (a) und (b).

Denn das Zeichen von $f'(a)$ ist nach der Voraussetzung dasselbe, als das von $f'(b)$. Gesetzt nun, alle Werthe, welche man erhält, wenn man in $f'(x)$ irgend einen, zwischen a und b liegenden Werth substituirt, hätten ebenfalls jenes gemeinschaftliche Zeichen, so daß also die Function $f'(x)$ für alle möglichen, zwischen a und b liegenden Werthe von x ihr Zeichen behielte; so müßte die Function $f(x)$ in diesem Intervalle stets wachsen, oder stets abnehmen, weil die abgeleitete Function der ersten Ordnung $f'(x)$ dasselbe Zeichen + oder — behält (siehe Seite 35.) Da also $f(a)$ dasselbe Zeichen hat als $f(b)$, und $f(x)$ stets wächst oder abnimmt, so kann $f(x)$ in diesem Intervalle nicht Null werden. Wenn man also in $f(x)$ alle möglichen, zwischen a und b liegenden Werthe substituirt, so behält die Function $f(x)$ dasselbe Zeichen, nämlich das gemeinschaftliche Zeichen von $f(a)$ und $f(b)$.

Ebenso beweist man, daß, wenn die Function $f''(x)$ in dem ganzen Abstande der Grenzen a und b ihr Zeichen beibehält, und wenn die äußern Werthe $f''(a)$, $f''(b)$ dasselbe Zeichen haben, die

Function $f'(x)$ in diesem Intervalle das gemeinschaftliche Zeichen von $f(a)$, $f'(b)$ beibehält; etc.

Nun ist aber klar, daß die Function $f^{(m)}(x)$ ihr Zeichen $+$ beibehält, weil die Veränderliche x nicht darin vorkommt. Hieraus folgt, daß eine Function $f(x)$ ihr Zeichen nicht ändert, in einem gegebenen Intervalle von $x = a$ bis $x = b$, wenn $f(a)$ und $f(b)$, $f'(a)$ und $f'(b)$, $f''(a)$ und $f''(b)$, $f'''(a)$ und $f'''(b)$, ... dasselbe Zeichen haben.

Wenn die Grenzwerthe $f(a)$ und $f(b)$ einer Function $f(x)$ auch dasselbe Zeichen haben, so könnte es doch geschehen, daß die Werthe von $f(x)$, welche zwischen a und b liegenden Werthen von x entsprechen, das Zeichen änderten, indem sie in diesem Intervalle mehrere Male Null würden. Dieses kann jedoch nicht statt finden, wenn die Grenzwerthe $f'(a)$ und $f'(b)$ einerlei Zeichen haben, und wenn diese Bedingung für alle übrigen abgeleiteten Functionen erfüllt wird.

2) Im Allgemeinen, wenn sich aus der durch die Vergleichung der Reihen:

$$(a) \ldots f^{(m)}(a),\ f^{(m-1)}(a), \ldots f''(a),\ f'(a),\ f(a)$$

$$(b) \ldots f^{(m)}(b),\ f^{(m-1)}(b), \ldots f''(b),\ f'(b),\ f(b)$$

gebildeten Reihe der Indices findet, daß der letzte, $f(x)$ entsprechende Index $\Delta = 0$ ist, und man substituirt eine zwischen a und b liegende Zahl c und bildet die den Intervallen von a bis c und von c bis b entsprechenden Reihen der Indices; so ist das letzte Glied jeder dieser beiden Reihen nothwendig $= 0$. Denn wenn der dem Intervalle von a bis c entsprechende letzte Index Δ' nicht $= 0$, sondern $= j$ wäre, so müßte die Reihe der Resultate j Zeichenwechsel verlieren, wenn die substituirte Größe von dem Werthe a zu dem Werthe c übergeht. Die Reihe der Resultate müßte also j Zeichenwechsel mehr bekommen, wenn man die substituirten Größen allmählich von c bis b wachsen ließe. Dieses ist aber, wie wir gesehen haben, nicht möglich; denn die Anzahl der Zeichenwechsel kann nur abnehmen, wenn die substituirten Größen zunehmen. Ebenso wird bewiesen, daß das letzte Glied der dem Intervalle von c bis b entsprechenden Reihe der Indices keine von 0 verschiedene Zahl sein kann. Denn sonst müßte die Reihe der Resultate in dem vorhergehenden Intervalle j Zeichenwechsel mehr bekommen haben, welches unmöglich ist.

Wenn also die beiden Reihen (a) und (b) so beschaffen sind, daß das letzte Glied Δ der dem Intervalle entsprechenden Reihe der Indices $= 0$ ist; so wird dieser letzte Index auch immer $= 0$, wenn man das Intervall durch Substitution zwischen a und b liegender Zahlen zertheilt. Jedes Partialintervall hat also 0 zum letzten Index.

Die beiden eben bewiesenen Lehrsätze sind für den Fall, wo die Function $f(x)$ nur eine Veränderliche enthält, und welchen wir hier allein betrachten, so zu sagen an und für sich klar, und der erste Satz ist ein besonderer Fall des zweiten. Es wäre hinreichend gewesen, diese beiden Sätze, welche offenbare Folgerungen aus der

vorhergehenden Theorie sind, bloß anzuführen; allein wir hielten es für zweckmäßiger, sie zu entwickeln, weil sie sich auch auf Functionen von einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen anwenden lassen. Wir betrachten hier diesen allgemeinen Satz nicht, aber es würde leicht sein, ihn nach denselben Prinzipien zu beweisen. Er bildet ein merkwürdiges Element der algebraischen Analysis.

§ 6. Es ist nun noch übrig, zu beweisen, daß man, wenn die beiden Grenzen, zwischen welchen eine Wurzel gesucht wird, hinreichend zusammengezogen sind, damit die in § 3 ausgesprochenen Bedingungen erfüllt werden, mit völliger Zuverlässigkeit zur approximativen Berechnung der Wurzel fortschreiten kann. Wir betrachten z. B. den Fall, wo die letzten Zeichen der beiden verglichenen Reihen folgende sind:

	$f''(x)$,	$f'(x)$,	$f(x)$
(a)....	+	+	−
	0	0	1
(b)....	+	+	+,

und setzen voraus, daß die in Rede stehenden Bedingungen erfüllt sind; d. h. wenn die drei letzten Indices 0 0 1 sind, so kommt es darauf an, einen Werth der Wurzel zu berechnen, welcher größer als a und kleiner als b ist. Wir wollen zuerst die rein analytische Auflösung der Aufgaben geben, und dann die Resultate durch die sich darauf beziehenden Constructionen erläutern.

Es sei β die unbekannte Größe, welche man von b abziehen muß, um die genaue Wurzel x zu finden, so daß $x = b - \beta$ ist. Alsdann ist:

$$f(b-\beta)=0,$$

und wenn man diesen Ausdruck bloß bis zum zweiten Gliede entwickelt (Seite 76):

$$f(b)-\beta f'(b-\beta\ldots b)=0,$$

wo $f'(b-\beta\ldots\ldots b)$ die Größe bezeichnet, in welche sich $f'(x)$ verwandelt, wenn man für x eine zwischen $b-\beta$ und b, oder zwischen x und b liegende Größe, die mit $b-\beta\ldots b$ oder $x\ldots b$ bezeichnet werden soll, substituirt. Es ist also:

$$\beta=\frac{f(b)}{f'(x\ldots b)},$$

und daraus folgt:

$$x=b-\frac{f(b)}{f'(x\ldots b)}.$$

Dieser Werth von x läßt sich auch durch:

$$x=b-\frac{f(b)}{f'(a\ldots b)}$$

ausdrücken; denn jeder zwischen x und b liegende Werth liegt auch zwischen a und b.

Es ist zu bemerken, daß die Function $f'(x)$, welche nach der Voraussetzung für $x=a$ und $x=b$ positiv ist, stets positiv bleibt, wenn man der Veränderlichen x irgend einen, zwischen a und b liegenden Werth gibt. Denn dieses Zeichen könnte sich nur dann ändern, wenn einer dieser zwischenliegenden Werthe die Function $f'(x)$ verschwinden machte, welches gegen unsere Voraussetzung ist. Die Function $f'(x)$ behält also in dem ganzen Intervalle von a bis b das Zeichen $+$. Dasselbe gilt von der Function $f''(x)$, und wird ebenso bewiesen. Die von $x=a$ bis $x=b$ stets positiv bleibende Function $f'(x)$ wächst also beständig in diesem Intervalle, weil ihre abgeleitete Function der ersten Ordnung $f''(x)$ in diesem Intervalle stets positiv ist.

Hieraus folgt, daß von allen Werthen, welche die Function $f'(x)$ bekommt, wenn man x von $x=a$ bis $x=b$ variiren läßt, $f'(a)$ der kleinste und $f'(b)$ der größte ist. Nun wird aber der genaue Werth von x ausgedrückt durch:

$$x=b-\frac{f(b)}{f'(a\ldots b)}.$$

Setzt man also $f'(b)$ für $f'(a\ldots b)$, so dividirt man $f(b)$ durch eine zu große Größe. Man zieht also von b weniger ab, als man sollte, um den wahren Werth der Wurzel zu finden. Folglich ist $b-\frac{f(b)}{f'(b)}=b'$ kleiner als b und größer als die gesuchte Wurzel. Aus der größern Grenze b ist also eine andere b′ abgeleitet, welche der Wurzel näher liegt, aber sie auch noch übertrifft.

§ 7. Man kann auch die kleinere Grenze a anwenden, um einen mehr genäherten Werth der Wurzel zu finden. Es sei $a+\alpha$ der wahre Werth der Wurzel x, wo α eine unbekannte Größe ist; so hat man die Gleichung:

$$f(a+\alpha)=0,$$

oder bis zum zweiten Gliede entwickelt:

$$f(a)+\alpha f'(a\ldots a+\alpha)=0.$$

Der Werth der Größe $a\ldots a+\alpha$ unter dem Zeichen f' ist eine, zwischen a und $a+\alpha$ oder zwischen a und x liegende Größe. Es ist also:

$$\alpha=-\frac{f(a)}{f'(a\ldots x)},$$

und weil jede, zwischen a und x liegende Größe auch zwischen a und b liegt; so hat man:

$$\alpha=-\frac{f(a)}{f'(a\ldots b)}.$$

Folglich:

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a \ldots b)}.$$

Man muß hierbei bemerken, daß der Werth von $f(a)$ negativ, und der von $f'(a \ldots b)$ positiv ist; so daß also das zweite Glied des Ausdruckes von x eine zu der Grenze a addirte positive Größe ist. Vorhin haben wir gesehen, daß $f'(b)$ der größte Werth ist, welchen man findet, wenn man in $f'(x)$ irgend eine, zwischen a und b liegende Größe substituirt. Wenn man also in dem letzten Ausdrucke des Werthes für x, $f'(b)$ statt $f'(a \ldots b)$ setzt, so wird dadurch die zu der Grenze a addirte Größe zu klein gemacht. Der genaue Werth von x ist folglich zuverlässig größer, als

$$a - \frac{f(a)}{f'(b)}.$$

§ 8. Wir haben so eben aus einem ersten genäherten Werthe a, welcher kleiner ist als die gesuchte Wurzel, einen zweiten mehr genäherten Werth als a abgeleitet, weil er größer ist als a, aber kleiner als die Wurzel x. Sei dieser neue Näherungswerth $= a'$, so hat man:

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(b)}.$$

Es bleibt also nichts weiter zu thun übrig, als diese neue Grenze a' mit dem zweiten Näherungswerthe b', welcher aus der ersten Grenze b abgeleitet ist, und durch:

$$b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

ausgedrückt wird, zu verbinden. Die Grenzen a und b, wovon die eine a kleiner und die andere b größer ist als die gesuchte Wurzel x, werden also durch zwei, mehr zusammengezogene Grenzen a' und b' ersetzt, wovon die eine a' ebenfalls kleiner und die andere b' größer ist als die gesuchte Wurzel x. Die Berechnung der Werthe a' und b' reducirt sich also auf die der Quotienten $\frac{f(a)}{f'(b)}$ und $\frac{f(b)}{f'(b)}$, wozu die drei Resultate $f(a)$, $f(b)$ und $f'(b)$ durch das zur Bestimmung der ersten Grenzen a und b angewandte Verfahren bereits bekannt sind. Es ist daher sehr leicht, die neuen, mehr als a und b genäherten Werthe a' und b' zu finden.

Wenn man sich auf die gewöhnliche Anwendung der newtonschen Methode beschränkt, so erhält man nur eine Grenze, und man weiß folglich nicht, wie viele Ziffern man bei der Verrichtung der angezeigten Division berechnen muß.* Unser Verfahren unterliegt dieser Ungewißheit nicht, weil man zwei neue Grenzen a' und b' kennt, wovon die eine kleiner und die andere größer ist, als die gesuchte Wurzel. Bei der Berechnung der Werthe $a' = a - \frac{f(a)}{f'(b)}$

und $b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$ muß man nicht die genauen Quotienten, welche zu zusammengesetzt sein könnten, anwenden; es genügt, den Calcul so weit zu treiben, daß die Werthe von a′ und b′ nur um eine sehr kleine Größe differiren, indem man jedoch die Bedingung conservirt, daß der Werth von a′ zu klein, und der von b′ zu groß genommen werden muß. Aus diesen so berechneten zweiten Grenzen a′ und b′ leitet man durch dasselbe Verfahren dritte Grenzen a″ und b″ ab, und wenn man dieses Näherungsverfahren unbestimmt fortsetzt; so wird man immer genauere Näherungswerthe finden, und stets die Grenzen des Fehlers kennen.

§ 9. Wir wollen nun das Maaß der Convergenz der Näherungswerthe, d. h. das Gesetz, nach welchem das Intervall der Grenzen beständig abnimmt, suchen. Der Ausdruck dieses Gesetzes ist eins der Hauptelemente unserer Aufgabe.

Sei i die Differenz der beiden Grenzen a und b, welche einander hinreichend genähert sind, daß zwischen ihnen zwar eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, aber keine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ und der Gleichung $f''(x) = 0$ liegt; so haben wir gesehen: 1) daß sich leicht erkennen läßt, ob diese Bedingungen erfüllt sind; 2) daß, wenn sie statt finden, aus den gegebenen Grenzen a und b andere, engere Grenzen a′ und b′ sich ableiten lassen, welche durch:

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(b)},\quad b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

ausgedrückt werden.

Es sei die Differenz der neuen Grenzen $b' - a' = i'$, so stehen die Differenzen $b - a$ und $b' - a'$ oder i und i′ in einer Beziehung zu einander, welche gesucht wird. Diese Aufgabe wird unmittelbar gelös't, wenn man in den Ausdruck von a′, $b - i$ für a setzt. Man hat also die Gleichungen:

$$b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)},$$

$$a' = b - i - \frac{f(b-i)}{f'(b)},$$

und wenn man $f(b-i)$ bis zum dritten Gliede entwickelt; so ist:

$$a' = b - i - \frac{f(b) - i f'(b) + \frac{i^2}{2} f''(b - i \ldots b)}{f'(b)}.$$

Die Größe $(b - i \ldots b)$ bezeichnet offenbar einen, zwischen $b - i$ und b, d. h. zwischen a und b liegenden Werth der Veränderlichen. Wenn man von b′ den so entwickelten Ausdruck von a′ abzieht, so findet sich:

$$b' - a' = i - \frac{f(b)}{f'(b)} + \frac{f(b)}{f'(b)} - i + \frac{i^2}{2} \cdot \frac{f''(a\ldots b)}{f'(b)},$$

oder:

$$i' = i^2 \cdot \frac{f''(a\ldots b)}{2f'(b)}.$$

Aus diesem merkwürdigen Resultate erhellet, daß man, wenn die Differenz i der beiden ersten Grenzen bekannt ist, die Differenz i' der beiden neuen Grenzen findet, wenn man das Quadrat von i mit dem Coeffienten $\frac{f''(a\ldots b)}{2f'(b)}$ multiplicirt. Der Renner $2f'(b)$ ist bekannt; der Zähler $f''(a\ldots b)$ ist der Werth, welchen man fände, wenn man in die Function $f''(x)$ eine, zwischen a und b liegende Größe substituirte. Wir wollen einen genäherten Werth des Coefficienten $\frac{f''(a\ldots b)}{2f'(b)}$, welcher größer als derselbe ist, mit C bezeichnen. Diese Größe C läßt sich, wie wir in den folgenden Paragraphen sehen werden, leicht finden, und der genäherte Werth Ci^2 der Differenz i' daraus ableiten. Auch werden wir zeigen, welchen praktischen Gebrauch man von diesem Näherungswerthe machen muß, um die durch jede einzelne Operation erhaltenen genauen Ziffern zu bestimmen. Denn, wenn die Differenz b — a der beiden ersten Grenzen eine sehr kleine Größe, z. B. eine Decimaleinheit der siebenten Ordnung, oder $(\frac{1}{10})^7$ geworden ist; so zeigt der Ausdruck von $i' = Ci^2$, daß die Differenz i' der beiden neuen Grenzen von derselben Ordnung ist, als $(\frac{1}{10})^{14}$. Die Zahl C behält ihren einmal bestimmten Werth im Verlaufe der ganzen Approximation bei, und die Differenzen i, i', i'',... werden Decimaleinheiten von sehr hohen Ordnungen. Die zweiten Grenzen a' und b' können noch ziemlich weit von einander entfernt sein, wenn die ersten a und b eine beträchtliche Differenz haben; allein die Convergenz der Approximation wird immer schneller, und jede Operation liefert eine stets wachsende Zahl von genauen Decimalziffern. Diese Folgerungen werden wir später mehr entwickeln, wo sich zugleich zeigen wird, wie sehr sie die Approximation erleichtern.

§ 10. Nachdem wir die analytischen Prinzipien, welche dieser Untersuchung zum Fundamente dienen, entwickelt haben, wollen wir die geometrischen Constructionen angeben, wodurch die Resultate dargestellt werden. Diese Constructionen sind sehr einfach, und denen analog, welche wir im vorhergehenden Abschnitte (§ 23) zur Unterscheidung der imaginären Wurzeln angewandt haben.

Betrachten wir den in § 6 angeführten Fall wieder, wo die letzten Zeichen der verglichenen Reihen:

	$f''(x)$,	$f'(x)$,	$f(x)$
(a)...	+	+	—
	0	0	1
(b)...	+	+	+

und die drei letzten Indices 0 0 1 sind.

Der Bogen mn (Fig. 4.) stellt einen Theil der Curve dar, deren Gleichung:

$$y = f(x)$$

ist. Die Abscissen oa, ob bezeichnen die gegebenen Grenzen a und b; die äußersten Ordinaten am, bn sind die Werthe von $f(a)$ und $f(b)$. Der Bogen mαn, welcher dem Intervalle ab der beiden Grenzen entspricht, hat keinen Wendepunkt, weil der dritte Index vom Ende 0 ist, und folglich die Gleichung $f''(x) = 0$ zwischen diesen Grenzen keine Wurzel hat. Die Curve kehrt ihre Convexität nach unten, weil die Function $f''(x)$ in dem ganzen Intervalle ab das Zeichen + behält. Da die Function $f'(x)$ in diesem Intervalle ebenfalls beständig das Zeichen + behält, so folgt, daß der Bogen mαn ein aufwärtsgehender ist. Die Ordinate $f(x)$ wächst also beständig, wenn die Abscisse wächst. Im Punkte a war sie negativ, näherte sich hierauf immer mehr dem Werthe Null, und nachdem sie positiv geworden ist, entfernt sie sich von Null. Es giebt nur einen einzigen Durchschnittspunkt α der Curve mit der Abscissenaxe. Im Punkte n sei der Curve eine Tangente gezogen und bis zum Durchschneiden mit der Axe verlängert; so ist klar, daß die Abscisse ob' des, zwischen α und b liegenden Punktes b' größer ist, als die Wurzel, aber dieser Wurzel näher liegt, als die Grenze b = ob. Zieht man nun durch den Punkt m eine Parallele zu der Tangente nb', so ist die Abscisse oa' des zwischen a und α liegenden Durchschnittspunktes a' mit der Axe kleiner, als die Wurzel, aber sie kommt dieser Wurzel näher als die Abscisse oa. Es ist bloß noch übrig, die Ausdrücke für die neuen Abscissen (Grenzen) oa' und ob' zu finden.

Nun ist aber im Punkte n das Verhältniß des Incrementes dy zu dem Incremente dx, oder $\frac{dx f'(x)}{dx}$ dem Verhältniß der Ordinate nb zur Subtangente bb' gleich. Man hat folglich:

$$\frac{dx f'(b)}{dx} = \frac{nb}{bb'} = \frac{f(b)}{bb'};$$

also ist die Linie $bb' = \frac{f(b)}{f'(b)}$, und folglich der Werth der Abscisse $ob' = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = b'$. Am Punkte n ist das Verhältniß $\frac{dy}{dx} = \frac{dx f'(b)}{dx}$ dem Verhältnisse der Ordinate am (mit entgegengesetztem Zeichen genommen) zu dem zwischen der Ordinate und der Parallele liegenden Stücke aa' der Axe gleich. Es ist folglich:

$$\frac{dx f'(b)}{dx} = -\frac{f(b)}{aa'}, \text{ oder } aa' = -\frac{f(a)}{f'(b)},$$

und daher die Grenze $oa' = a' = a - \frac{f(a)}{f'(b)}$.

Die beiden Resultate der linearen Approximation werden also

durch diese Construction sehr versinnlicht. Die beiden, den ersten Grenzen entsprechenden Abscissen o a, o b werden durch zwei andere oa′, ob′ ersetzt, welche dadurch bestimmt werden, daß man im Punkte n an die Curve eine Tangente, und durch den Punkt m zu der Tangente eine Parallele zieht. Sind nun a′, b′ die Endpunkte des Stückes a a′ und der Subtangente, oder allgemeiner, zwei Punkte, wovon der eine zwischen a und a′ und der andere zwischen b und b′ liegt, und bezeichnen m′ und n′ die Punkte, in welchen die in a′ und b′ errichteten Ordinaten die Curve treffen; so kann man für die Punkte m′ und n′ dieselbe Construction als für m und n anwenden. Es leuchtet ein, daß man die beiden Näherungswerthe $b - \frac{f(b)}{f'(b)}$, $a - \frac{f(a)}{f'(b)}$, welche wir in § 6 und 7 durch den Calcul gefunden haben, aus dieser Construction allein hätte herleiten können. Der erste dieser Werthe ist der, welchen die newtonsche Methode gibt, welche im Allgemeinen darin besteht, den ersten, als Abscisse betrachteten Näherungswerth dadurch zu verbessern, daß man zu dieser Abscisse den Werth der Subtangente addirt. Der zweite genäherte Werth $a - \frac{f(a)}{f'(b)}$ vervollständigt die Approximation des ersten Grades, welche wir deswegen so nennen, weil sie nur von der abgeleiteten Function des ersten Grades abhängt.

§ 11. Aus der vorhergehenden Construction erhellen zugleich die Bedingungen, welche die lineare Approximation erfordert. Denn wenn der Punkt b (Fig. 4.) dem Durchschnittspunkte α sehr nahe liegt, so schneidet die durch den Endpunkt n der Ordinate b n gezogene Tangente die Axe in einem, zwischen b und α liegenden Punkte b′, und der neue, durch die Abscisse o b′ ausgedrückte Näherungswerth b′ kommt der Wurzel weit näher, als der vorhergehende b, welcher durch die Abscisse o b ausgedrückt wurde. Wenn aber der erste Werth o B, auf welchem der Calcul angewandt wird, dem Punkte B entspricht, so ist klar, daß die durch den Punkt N gezogene Tangente die Axe in einem sehr weit vom Durchschnittspunkte α entfernten Punkte schneiden kann. In diesem Falle gibt die newtonsche Methode die gesuchte Wurzel nicht mit Gewißheit; sie kann vielmehr zu Resultaten führen, welche von denen, die das Object der Untersuchung ausmachen, sehr verschieden sind. Soll diese Ungewißheit nicht statt finden, so muß der Endpunkt n der Ordinate b n weniger vom Anfangspunkte o entfernt sein, als der nächste Wendepunkt r.

Auch sieht man, daß die newtonsche Methode nicht gleichgültig auf die Grenze a und auf die Grenze b angewandt werden kann; denn die durch den Endpunkt m der Ordinate a m gezogene Tangente könnte die Abscissenaxe in einem Punkte schneiden, welcher von dem Durchschnittspunkte α viel weiter entfernt wäre, als der Punkt b. Die Grenzen o a, o b (Fig. 5.), zwischen welchen ein Durchschnittspunkt α liegt, könnten so weit von einander entfernt sein, daß es in dem Intervalle a b mehrere Punkte p, p gäbe, wo die Tangente mit der Abscissenaxe parallel ist, und mehrere Wendepunkte

r, r, r, welche einen converen Bogen von einem concaven trennen. In diesem Falle muß man von der lineären Approximation noch keinen Gebrauch machen, sondern das Intervall so lange verkleinern, bis der Bogen, welcher dem neuen Intervalle entspricht, weder Punkte wie p, noch Wendepunkte r hat.

Lagrange hat in seinem Werke über die Auflösung der numerischen Gleichungen bereits angezeigt, daß die newtonsche Näherungsmethode unvollständig ist, weil sie kein Merkmal darbietet, woran man die Richtigkeit der Annäherung mit Gewißheit erkennen könnte. Dieser große Geometer bemerkt (Einleitung S. 13), daß man den Grad der Genauigkeit jeder Correction nicht beurtheilen könne, weil man bei jeder Operation Glieder wegläßt, deren Werth man nicht kennt; und später fügt er hinzu, daß es sehr schwer, und vielleicht selbst unmöglich sei, a priori ein Merkmal zu finden, wonach sich beurtheilen ließe, ob die Bedingung der Convergenz der Operation erfüllt sei, oder nicht. Diese wichtige Frage ist durch die in dem vorhergehenden Abschnitte zur Bestimmung der Grenzen der Wurzeln gegebene Methode vollständig gelöst. Denn diese Methode zeigt, ob die Gleichung $f(x)=0$ zwischen den beiden Grenzen a und b eine reelle Wurzel hat, und ob jede der Gleichungen $f'(x)=0$, $f''(x)=0$ in diesem Intervalle keine Wurzel hat. Ferner lassen sich in allen Fällen für jede Wurzel zwei Grenzen angeben, welche diesen Bedingungen Genüge leisten. Die lineäre Approximation, wovon die newtonsche Regel einen Theil ausmacht, kann folglich immer angewandt werden.

Diese Folgerungen werden für den eben betrachteten Fall durch Construction in das hellste Licht gesetzt; denn der Bogen m n (Fig. 4.) kann weder einen Wendepunkt, noch eine zur Are der x parallele Tangente haben, weil die Gleichungen $f'(x)=0$ und $f''(x)=0$ zwischen a und b keine reelle Wurzel haben. Der erste Näherungswerth b führt zu dem Endpunkte b' der Subtangente; oder wenn man zur Erleichterung der Rechnung bei einem, nahe bei b', zwischen b' und b liegenden Punkte β' stehen bleibt, so gelangt man durch dasselbe Verfahren vom Punkte β' zu einem andern Punkte β'', welcher dem Durchschnittspunkte α näher liegt. Diese Operation kann man beliebig weit fortsetzen.

§ 12. Die Curve hat nicht immer die Lage, wie in Fig. 4. Man muß im Allgemeinen vier Fälle unterscheiden, welche durch Fig. 6, 7, 8 und 9 dargestellt werden, und wovon wir den ersten bereits betrachtet haben. Im ersten Falle (Fig. 6.) geschieht die Approximation, wie gesagt, mittelst der succesiven Tangenten, wovon die erste durch den Punkt n geht. Im zweiten Falle (Fig. 7.) geht die erste Tangente durch den Punkt m. Im dritten Falle (Fig. 8.) geht sie ebenfalls durch den Endpunkt m der Ordinate a m. Im vierten Falle (Fig. 9.) geht die erste Tangente durch den Endpunkt n der Ordinate b n. Die bloße Betrachtung der Figuren zeigt schon die Convergenz der Approximationen, und zugleich für alle Fälle die Bedingung dieser Convergenz, daß nämlich der Bogen m n keine Biegungen oder Wendepunkte haben darf. Dieses findet aber immer statt,

wenn die Gleichungen $f'(x)=0$ und $f''(x)=0$ zwischen a und b keine reelle Wurzel haben. Hiervon überzeugt man sich, wenn man, wie bereits bemerkt ist, die Grenzen a und b in die Reihe der Functionen:

$$f^{(m)}(x),\ f^{(m-1)}(x),\ \ldots f'''(x),\ f''(x),\ f'(x),\ f(x)$$

substituirt, welches zwei Reihen von Resultaten gibt, nämlich:

$$(a) \ldots f^{(m)}(a),\ f^{(m-1)}(a) \ldots f'''(a),\ f''(a),\ f'(a),\ f(a),$$

$$(b) \ldots f^{(m)}(b),\ f^{(m-1)}(b) \ldots f'''(b),\ f''(b),\ f'(b),\ f(b).$$

Man vergleicht die Zeichen der beiden Reihen (a) und (b), und wenn diese beiden Reihen sich nur durch das letzte Zeichen unterscheiden, welches für die eine positiv und für die andere negativ ist; so haben die Gleichungen $f''(x)=0$ und $f'(x)=0$ in dem Intervalle gewiß keine Wurzel. Der Bogen m n hat folglich keine zur Abscissenaxe parallele Tangente und keinen Inflexionspunkt. Die Grenzen sind also hinreichend zusammengezogen, daß man von der Approximationsregel mit Zuverlässigkeit Gebrauch machen kann.

Auch ist einleuchtend, daß es nicht nöthig ist, daß sich die beiden Zeichenreihen (a) und (b) nur durch das letzte Zeichen unterscheiden; es ist hinreichend, die Anzahl der Zeichenwechsel dieser beiden Reihen zu vergleichen. Bei dieser Vergleichung geht man von der Linken nach der Rechten, und bleibt zuerst bei der Function $f''(x)$ incl. stehen. Findet man, daß die beiden Reihen bis zu diesem Gliede dieselbe Anzahl von Zeichenwechsel haben, so schließt man daraus, daß die Gleichung $f''(x)=0$ zwischen den Grenzen a und b keine Wurzel hat. Ebenso vergleicht man die beiden Reihen (a) und (b), indem man bei der Function $f'(x)$ incl. stehen bleibt, und wenn die beiden Reihen noch dieselbe Anzahl von Zeichenwechseln haben; so folgt, daß die Gleichung $f'(x)=0$ zwischen den Grenzen a und b ebenfalls keine Wurzel hat. Man kann alsdann unmittelbar zur Anwendung der Näherungsmethode fortschreiten, und wird zuverlässig zwei engere Grenzen a' und b' als die vorhergehenden a und b finden.

Diese Vergleichung der beiden Reihen (a) und (b) reducirt sich, wie man sieht, darauf: die dem Intervall der Grenzen a und b entsprechende Reihe der Indices zu bilden, und zu untersuchen, ob die drei letzten Indices 0 0 1 sind, welche Bedingung erforderlich, aber auch zureichend ist. Wenn sie nicht erfüllt wäre, so würde die Approximation falsch, oder doch wenigstens ungewiß sein; und man darf nur dann zu ihr überschreiten, wenn die Grenzen hinreichend zusammengezogen sind. Wenn aber die drei letzten Indices 0 0 1 geworden sind, so ist dieses ein Zeichen, daß die beiden Grenzen a und b einander hinreichend nahe liegen, um sofort von der linearen Approximation Gebrauch machen zu können. Man geht alsdann von den Grenzen a und b zu zwei andern Grenzen a' und b' über, welche dieselbe Eigenschaft haben als sie. Die eine dieser neuen Grenzen wird durch die newtonsche Regel gegeben, und im

ersten Falle (Fig. 6.) ausgedrückt durch:

$$b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

§ 13. Aus den Constructionen erhellet sehr deutlich, daß die newtonsche Methode nicht ohne Unterschied auf die eine oder die andere Grenze angewandt werden darf. Im ersten Falle (Fig. 6.) ist der Bogen concav, d. h. er kehrt seine convexe Seite nach unten und aufwärtsgehend. Im zweiten Falle (Fig. 7.) ist er concav und geht niederwärts. Im dritten Falle (Fig. 8.) ist der Bogen aufwärtsgehend und convex, d. h. er kehrt seine Convexität nach oben. Im vierten Falle (Fig. 9.) geht der Bogen niederwärts und ist convex.

Für den ersten Fall sind die drei letzten Zeichen der Reihe (a), welche gebildet wird, wenn man a für x in die Functionen:

$$f''(x),\ f'(x),\ f(x)$$

substituirt:

$$+ \quad + \quad -$$

und die der Reihe (b):

$$+ \quad + \quad +.$$

Für den zweiten Fall sind die drei letzten Zeichen der beiden Reihen:

$$(a) \ldots \quad + \quad - \quad +$$

$$(b) \ldots \quad + \quad - \quad -.$$

Für den dritten Fall sind die drei letzten Glieder der beiden Zeichenreihen:

$$(a) \ldots \quad - \quad + \quad -$$

$$(b) \ldots \quad - \quad + \quad +.$$

Endlich für den vierten Fall sind die drei letzten Glieder der beiden Reihen:

$$(a) \ldots \quad - \quad - \quad +$$

$$(b) \ldots \quad - \quad - \quad -.$$

Im ersten und vierten Falle muß das Näherungsverfahren auf die größere Grenze b angewandt werden, weil die durch den Punkt n gezogene Tangente zuverlässig einen zweiten, mehr als b genäherten Werth b′ gibt. Im zweiten und dritten Falle ist es die kleinere Grenze a, auf welche das Verfahren angewandt werden muß; denn die durch den Punkt m gezogene Tangente gibt zuverlässig einen zweiten, mehr als a genäherten Werth a′.

Um die der beiden Abscissen zu unterscheiden, welche die zu wählende Grenze darstellt, braucht man nur zu bemerken, daß dem Endpunkte dieser Abscisse die Convexität und nicht die Concavität des Bogens mn zugekehrt ist. Diese Grenze kann die äußere Grenze genannt werden, weil ihr Endpunkt außerhalb des von

der Curve eingeschlossenen Raumes liegt. Die andere Grenze soll die innere heißen.

Nicht weniger leicht ist es, die Grenzen an den Zeichen der beiden Reihen (a) und (b) zu erkennen. Die äußere Grenze ist immer die, welche für $f(x)$ und $f''(x)$ dasselbe Zeichen gibt.

§ 14. Wir haben gesehen, daß zur regelmäßigen Anwendung der Näherungsmethode erforderlich ist, zwei Grenzen a und b zu kennen, zwischen welchen die zu berechnende Wurzel allein liegt, und sich durch Substitution der zwei Zahlen a und b in die Reihe der Functionen $f^{(m)}(x)$, $f^{(m-1)}(x) \ldots f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$ zu versichern, daß die Gleichung $f(x)=0$ zwischen a und b eine reelle Wurzel hat; die Gleichungen $f'(x)=0$, $f''(x)=0$ aber keine. Diese Grenzen werden nach der in dem vorhergehenden Abschnitte erklärten Methode bestimmt, und wenn sie anfangs nicht genug zusammengezogen wären, daß die dem Intervalle entsprechende Reihe der Indices sich nicht mit 0 0 1 schlösse; so müßte man das Intervall so lange vermindern, bis diese Bedingung erfüllt würde. Es ist immer leicht, dieses Resultat zu erhalten, wie aus der Construction sehr deutlich erhellet. Der Curvenbogen mn, dessen Durchschnitt mit der Axe die gesuchte Wurzel bestimmt, könnte eine so große Ausdehnung haben, daß er mehrere Biegungen und Wendungen darböte, obgleich er nur einen einzigen Durchschnittspunkt hätte. Dieses findet bei Fig. 5 statt. Die Grenzen a und b könnten so weit von einander entfernt sein, daß der Bogen mn zwei Punkte p, p des Maximums oder Minimums, drei Inflexionspunkte p, p, p und doch nur einen Durchschnittspunkt α hätte. Es ist aber klar, daß man durch Zusammenziehung der Grenzen zu einander so nahe liegenden Werthen a′ und b′ gelangen könnte, daß der Bogen mn weder Biegungen, noch Wendungen hätte. Bloß die besondern Fälle, wo man die Wendepunkte, Durchschnittspunkte und die Punkte, für welche die Ordinate ein Maximum oder Minimum ist, auf diese Weise nicht trennen könnte, sind zu bemerken. Dieses geschieht: 1) wenn zwei Wurzeln gleich sind; 2) wenn der Wendepunkt r mit dem Durchschnittspunkte α zusammenfällt. Den ersten Fall betrachten wir hier nicht, weil die beiden Wurzeln nicht gesondert sind; also die dem Intervalle entsprechende Reihe der Indices nicht mit 1 schließt, wie hier vorausgesetzt wird, sondern mit 2. Was den zweiten Fall anlangt, so ist er dem der gleichen Wurzeln analog, und beide sind leicht zu unterscheiden. In dem ersten Falle haben die beiden Functionen $f'(x)$, $f(x)$ und in dem zweiten Falle die beiden Functionen $f''(x)$ und $f(x)$ einen gemeinschaftlichen Factor. Man braucht also diese Functionen nur zu vergleichen, um zu sehen, ob sie einen gemeinschaftlichen Factor haben, und wir haben im Vorhergehenden gesehen, daß diese Vergleichung in der zur Bestimmung der Grenzen der Wurzeln dienenden Regel begriffen ist.

§ 15. Fassen wir nun alle bisher bewiesenen Sätze in eine allgemeine Uebersicht zusammen.

Wenn man die zur Bestimmung der Grenzen dienende Methode auf eine gegebene Gleichung $f(x)=0$ anwendet, und man hat zwei Grenzen a und b gefunden, zwischen welchen eine einzige Wurzel

liegt; so geschieht die weitere Berechnung dieser Wurzel auf folgende Weise: Das letzte Glied der dem Intervalle entsprechenden Reihe der Indices ist nach der Voraussetzung 1. Man untersucht, ob die durch die Substitution der Grenzen a und b gegebenen beiden Zeichenreihen nur, wie es gewöhnlich geschieht, in dem letzten Zeichen verschieden sind. Wenn diese Bedingung statt findet, so kann man die Approximationsmethode unmittelbar anwenden. Zu dieser Anwendung kann man auch sogleich fortschreiten, wenn die beiden Zeichenreihen zwar verschieden, aber die drei letzten Glieder der Reihe der Indices 0 0 1 sind. Wenn diese letzte Bedingung nicht erfüllt ist, so ist dieses ein Zeichen, daß die Grenzen noch nicht genug zusammengezogen sind, um von der Näherungsmethode mit Zuverlässigkeit Gebrauch machen zu können, und man muß das Intervall der Grenzen durch Substitution einer zwischenliegenden Zahl verkleinern. Zuvor muß man aber untersuchen, ob die beiden Functionen $f'(x)$ und $f(x)$ einen gemeinschaftlichen Divisor $\varphi(x)$ haben. Wenn sich dieser besondere Fall darböte, und wenn außerdem die Gleichung $\varphi(x)=0$ zwischen a und b eine reelle Wurzel α hätte, was sich nach den bereits aufgestellten Prinzipien leicht erkennen läßt; so bliebe bloß diese Wurzel α noch zu bestimmen. Man würde also die gegenwärtige Regel auf die Gleichung $\varphi(x)=0$ anwenden.

Wenn dieser gemeinschaftliche Factor nicht vorhanden ist, so gelangt man durch Theilung des Intervalles zu zwei Grenzen a und b, für welche die drei letzten Indices 0 0 1 sind. Man unterscheidet alsdann die der beiden Grenzen, welche, in $f''(x)$ und $f(x)$ substituirt, dasselbe Zeichen gibt. Bezeichnet man diese äußere Grenze mit c, substituirt $c+\gamma$ statt c in die Gleichung $f(x)=0$ und läßt im Resultate die höhern Potenzen von γ als die erste hinweg; so bestimmt man durch eine bloße Zahlendivision einen genäherten Werth von γ, indem man, ohne Rücksicht auf das Zeichen, den Quotienten zu klein nimmt. Auf diese Weise findet man einen zweiten genäherten Werth c', und man könnte dasselbe Verfahren beliebig weit fortsetzen, indem man mit der neuen Grenze c' wie mit der Grenze c operirte.

§ 16. Aus dem Vorhergehenden erhellet, daß diese Anwendung der Regel immer mehr und mehr genäherte Werthe geben würde, welche aber, wie in § 2 bereits bemerkt, entweder alle größer, oder alle kleiner sein würden, als die gesuchte Wurzel. Man würde also bei der zur Bestimmung eines neuen Theils der Wurzel zu verrichtenden Zahlendivision nicht wissen, wie weit man diese Operation treiben müßte. Wenn man sich auf eine Ziffer des Quotienten beschränkte, so würde einer der Hauptvorzüge der Methode verloren gehen; denn eine Operation kann mehrere genaue Ziffern geben, und zwar gibt sie deren um so mehr, jemehr bereits bekannt sind. Wenn man dagegen den Quotienten über die der Wurzel angehörigen genauen Ziffern hinaus entwickelte, so würden die spätern Operationen complicirt und verworren werden. Es ist einleuchtend, daß zur regelmäßigen Anwendung eines solchen Verfahrens erforderlich ist, nach einer festen Regel bestimmen zu können, wie viele der Wurzel wirklich angehörige Ziffern jede Operation gibt. Die Prinzipien, wodurch diese Aufgabe vollständig gelöst wird, sind im Vor-

hergehenden angegeben. Wenn man zwei Grenzen a und b gefunden hat, welche, in die Reihe der Functionen $f^{(m)}(x), \ldots f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$ substituirt, zwei Reihen von Resultaten geben, deren Zeichen bis auf die der beiden letzten dieselben sind, oder allgemeiner, wenn die drei letzten Glieder der Reihe der Indices **0 0 1** sind; so läßt sich daraus für die Berechnung der genäherten Werthe der Wurzeln folgende Regel ableiten: Man muß, indem β diejenige der beiden Grenzen bezeichnet, welche, in die Functionen $f''(x)$ und $f(x)$ substituirt, zwei Resultate von einerlei Zeichen gibt, den Ausdruck:

$$\beta' = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$$

bilden, und wenn α die andere Grenze bezeichnet, welche für $f''(x)$ und $f(x)$ verschiedene Zeichen gibt, auch den Ausdruck:

$$\alpha' = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\beta)};$$

so sind α' und β' zwei neue Werthe, zwischen welchen die Wurzel x liegt, und welche mehr zusammengezogen sind als α und β.

§ 17. Diese aus den ersten Grenzen α und β abgeleiteten neuen Grenzen:

$$\beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}, \quad \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\beta)},$$

sind nicht die einzigen, welche man zur genäherten Berechnung der Wurzeln anwenden kann. Aus der bloßen Betrachtung der Fig. 10 erhellen unmittelbar fünf Grenzen und ihre Eigenschaften. Durch den Endpunkt der Ordinate, welche einer der Grenzen entspricht, muß man an den Bogen eine Tangente ziehen, und dieselbe so weit verlängern, bis sie die Abscissenaxe schneidet. Durch den Endpunkt der Ordinate, welche der andern Grenze entspricht, zieht man ebenfalls eine Tangente, und durch den Endpunkt jeder dieser beiden Ordinaten eine Parallele zu der durch den Endpunkt der andern Ordinate gehenden Tangente. Endlich zieht man durch die Endpunkte dieser beiden Ordinaten eine Secante, indem man den Durchschnittspunkt mit der Abscissenaxe bemerkt. Alsdann stellt das System dieser fünf geraden Linien alle Bedingungen der linearen Approximation dar; d. h. man kennt auf diese Weise neue Näherungswerthe, welche sich aus den beiden ursprünglichen Grenzen α und β durch die bloße Auflösung einer Gleichung des ersten Grades herleiten lassen. Man kann nach der Beschaffenheit der besondern Fälle diejenige der fünf Grenzen wählen, welche sich am leichtesten berechnen läßt; aber nicht immer sind die beiden neuen Grenzen mehr genähert, als die beiden vorhergehenden. Diese Eigenschaft kommt nur den im vorhergehenden § durch:

$$\beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} \text{ und } \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\beta)}$$

ausgedrückten Grenzen zu, und derjenigen der fünf Grenzen, welche durch die Secante bestimmt wird. Der Ausdruck für diese letzte ist:

$$\beta - f(\beta) \cdot \frac{\beta - \alpha}{f(\beta) - f(\alpha)}.$$

Der Factor, womit $-f(\beta)$ multiplicirt ist, ist der Quotient aus der Differenz $\beta - \alpha$ der beiden Abscissen durch die Differenz $f(\beta) - f(\alpha)$ der beiden Ordinaten, und in dem vorhergehenden Ausdrucke $\beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ ist der Factor, welcher $-f(\beta)$ multiplicirt, der Quotient aus dem Differenzial $d\beta$ der Abscisse durch das Differenzial $d\beta f'(\beta)$ oder $d.f(\beta)$ der Ordinate. Beide Ausdrücke sind also darin unterschieden, daß die endliche Differenz an die Stelle des Differenzials getreten ist.

Wenn die Differenz der Grenzen noch ziemlich groß ist, so sind die daraus hergeleiteten fünf neuen Grenzen sehr merklich von einander verschieden, und man muß diejenigen wählen, welche die am meisten genäherten Werthe geben. Jemehr aber das Intervall der ersten Grenzen abnimmt, desto mehr nähern sich die neuen, daraus hergeleiteten Grenzen, und der Grad der Convergenz wird für alle derselbe. Das Maaß dieser Convergenz wird in der Folge angegeben werden.

§ 18. Der einfachste Fall der linearen Approximation ist der, welchen die zweigliedrigen Gleichungen von der Form:

$$x^m - A = 0$$

darbieten. Der Exponent m ist bekannt, und A ist eine positive Zahl; die Rechnung reducirt sich also auf die Ausziehung der m^{ten} Wurzel aus der Zahl A. Die arithmetische Operation, durch welche diese Wurzel gefunden wird, läßt sich unmittelbar aus den von uns aus einander gesetzten Prinzipien ableiten. Denn wenn man die in dem vorhergehenden Abschnitte gegebenen Regeln auf die Function $f(x) = x^m - A$ anwendet, so ergibt sich sogleich die Anzahl der Ziffern, woraus die Wurzel besteht, und die erste dieser Ziffern. Man kennt also zwei erste Grenzen α und β, zwischen welchen die Wurzel liegt, und welche nur um eine Einheit einer gewissen Decimalordnung differiren. Die drei letzten Functionen sind:

$$\begin{matrix} f''(x), & f'(x), & f(x) \\ m(m-1)x^{m-2}, & mx^{m-1}, & x^m - A. \end{matrix}$$

Die der Grenze a entsprechende Zeichenreihe ist:

$$(a) \ldots + \ldots\ldots + \quad + \quad -,$$

und die der Grenze b entsprechende:

$$(b) \ldots + \ldots\ldots + \quad + \quad +;$$

also die Reihe der Indices:

$$0 \quad 0 \quad 1.$$

Der zugehörige Curvenbogen wird durch Fig. 10 dargestellt. Wenn man durch den der kleinern Grenze a entsprechenden Punkt m die Tangente mα zieht, so findet man eine Subtangente aα, welche, zu der Abscisse oa addirt, eine neue Abscisse oα gibt, die nothwendig größer ist, als die Abscisse ox des Durchschnittspunktes x. Hat man durch den Endpunkt n der der größern Grenze b entsprechenden Ordinate die Tangente nβ gezogen, und zieht durch den Punkt m eine Parallele ma' zu dieser Tangente; so findet man durch Hinzufügung des Stückes aa' zu der Abscisse oa eine neue Abscisse oa', welche nothwendig kleiner ist, als die Abscisse ox des Durchschnittspunktes x. Die Wurzel liegt also zwischen oa' und oα. Man muß also zu dem schon bekannten Theile a der Wurzel den Werth von $a\alpha = \frac{f(a)}{f'(a)} = \frac{a^m - A}{m a^{m-1}}$ addiren, und die Summe wird nothwendig größer sein, als die gesuchte Wurzel x. Wenn man aber zu dem bereits bekannten Theile a den Werth von $aa' = \frac{f(a)}{f'(b)} = \frac{a^m - A}{m b^{m-1}}$ addirt, so ist die Summe zuverlässig kleiner als die Wurzel. Da der Zähler $a^m - A$ den Rest R ausdrückt, welcher durch die arithmetische Operation erhalten wird, die einen ersten Theil der Wurzel finden lehrt; so ergibt sich hieraus folgender Satz: Wenn man den Rest R durch das m fache der $m-1$ ten Potenz des bereits bekannten Theiles a der Wurzel dividirt, so ist der Quotient größer, als die Zahl, welche man zu dem Theile a hinzufügen muß, um die Wurzel vollständig zu machen. Wenn man aber die letzte Ziffer von a um eine Einheit vermehrt, welches nach der Voraussetzung einen Werth b gibt, der größer ist, als die gesuchte Wurzel, und dividirt dann denselben Rest R durch das m fache der $m-1$ ten Potenz von b; so ist der Quotient kleiner, als die Zahl, welche man zu a addiren muß, um die Wurzel vollständig zu machen. Die beiden Quotienten $\frac{R}{m a^{m-1}}$, $\frac{R}{m b^{m-1}}$ sind im Anfange der Operation so sehr von einander verschieden, daß die Vergleichung dieser Quotienten nicht zur Erleichterung der Berechnung der Wurzel dienen kann. Wenn man aber erst eine größere Anzahl genauer Ziffern der Wurzel kennt, so sind die beiden Quotienten $\frac{R}{m a^{m-1}}$, $\frac{R}{m b^{m-1}}$ sehr wenig von einander verschieden; und da die den beiden Grenzen gemeinschaftlichen Ziffern nothwendig der gesuchten Wurzel angehören, so folgt, daß jede Operation eine gewisse Anzahl genauer Ziffern gibt, und daß keine Ungewißheit übrig bleibt hinsichtlich der Ziffer, bei welcher man in jeder Zahlendivision stehen bleiben muß.

Das Gesetz, nach welchem die Anzahl der durch jede Zahlendivision erhaltenen genauen Ziffern wächst, läßt sich leicht bestimmen, und man hat diese Art von Bemerkungen bei den zur Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel dienenden Operationen längst gemacht. Allein diese Folgerungen beschränken sich nicht bloß auf so

einfache Fälle; und wir werden bald zeigen, daß sie ebenfalls für die Wurzeln aller algebraischen Gleichungen von jeder beliebigen Anzahl von Gliedern gelten. Diese Eigenthümlichkeiten sind selbst noch weit allgemeiner; sie sind von der Natur der bestimmten Gleichungen, deren Wurzeln man sucht, ganz unabhängig; sie entspringen aus dem Charakter der linearen Approximation.

§ 19. Aus dem vorhergehenden Paragraphe erhellet, daß die Elementarregeln, welche zur Ausziehung der Wurzeln aus Zahlen dienen, nichts weiter sind, als höchst specielle Anwendungen einer allgemeinen Methode, welche die Gleichungen aller Grade umfaßt. Aus diesem Gesichtspunkte haben Vieta, Harriot, Dugthred, Newton und Wallis die Aufgabe von der allgemeinen Auflösung der Gleichungen zuerst betrachtet. Sie waren der Meinung, es müsse eine allgemeine exegetische Operation geben, durch welche man successive alle Theile irgend einer Wurzel einer aus dem ersten Gliede x^m, dem letzten bekannten Gliede A, und andern zwischen beiden liegenden Gliedern $a_1 x^{m-1}$, $a_2 x^{m-2}$, $a_3 x^{m-3}$.... bestehenden Gleichungen finden könnte. Newton entdeckte den Theil dieser allgemeinen Methode, welcher sich auf Buchstabengleichungen mit einer Unbekannten anwenden läßt, und wovon er in der Theorie der Reihen eine sehr ausgedehnte Anwendung gemacht hat. Lange vorher hatte Vieta dieselbe Ansicht vorgeschlagen; allein die mathematischen Theorien waren damals noch viel zu unvollkommen, als daß sich zu dieser Zeit eine so ausgedehnte Methode hätte entwickeln können. Der sehr einfache Fall der zweigliedrigen Gleichungen konnte leicht gelöst werden, weil die Natur der Wurzeln bekannt ist, und zur Bestimmung ihrer Grenzen keine besondere Regel erforderlich war. Wenn man aber eine beliebige Anzahl von Gliedern mit beliebigen Coefficienten betrachtet, so ist zur Distinction der reellen und imaginären Wurzeln und zur Bestimmung zweier Grenzen jeder reellen Wurzel eine gründliche Untersuchung erforderlich.

Die Berechnung des Zahlenwerthes jeder Wurzel gründet sich, wie wir in § 16 und 17 gesehen haben, auf die Vergleichung zweier, sich immer mehr und mehr nähernden Grenzen, zwischen welchen diese Wurzel nothwendig liegt. Die bewiesenen Sätze wären, streng genommen, zur richtigen Berechnung der Wurzeln hinreichend; allein es ist von hoher Wichtigkeit, dieser Methode einen neuen Grad der Vervollkommnung zu geben, um sie einer leichten Anwendung fähig zu machen. Ueberhaupt muß man diese Untersuchung nicht als geschlossen betrachten, so lange man nicht dahin gelangt ist, die Operation auf diejenigen Rechnungen zu reduciren, welche unumgänglich nothwendig verrichtet werden müssen. Es kommt nicht bloß darauf an, die gesuchte Wurzel mit Zuverlässigkeit zu finden, sondern man muß der Methode alle Einfachheit geben, welche sie, ohne ihrer Allgemeinheit Abbruch zu thun, nur gestattet. Um diesen Zweck zu erreichen, haben wir folgende drei verschiedene Aufgaben zu lösen:

Die erste ist rein arithmetisch, und besteht darin: die Operation der Division einer Zahl durch eine andere so zu ordnen, daß man jede Ziffer des Divisors nur dann zur Bestimmung des Quotienten

concurriren läßt, wenn dieses durchaus nothwendig ist, damit wegen der Richtigkeit der Ziffer des Quotienten keine Ungewißheit entsteht.

Der Gegenstand der zweiten Aufgabe ist: die zur Berechnung der Wurzel nöthigen Substitutionen in einer solchen Ordnung vorzunehmen, daß kein Theil der Operation sich wiederholt, und die Fortsetzung der Rechnung bloß darin besteht, daß man das dem neuen Theil der Wurzel entsprechende Resultat zu dem der vorhergehenden Operation hinzufügt.

Die dritte Aufgabe besteht in der Bestimmuug des genauen Maaßes der Convergenz der Approximation, um mit völliger Zuverlässigkeit zu wissen; wie viele Ziffern jede Zahlendivision gibt, welche als Theile der Wurzel beibehalten werden müssen.

§ 20. Wenn man die erste Aufgabe untersucht, so erhellet sogleich, daß die gewöhnliche Regel für die Division der Zahlen zu überflüssigen Rechnungen Veranlassung geben würde. Denn um die Grenzen a und b zu bestimmen, muß man die Werthe von Quotienten, wie $\frac{f(a)}{f'(a)}$ berechnen; und da der Nenner $f'(a)$ aus der Substitution des bereits bekannten Theiles a der Wurzel in die Function $f'(x)$ entspringt; so kann er mehrere Decimalziffern enthalten, und er hat in der That viele solcher Ziffern, wenn die Operation bereits sehr vorgeschritten ist. Nun haben aber die letzten Ziffern des Divisors auf die ersten Ziffern des Quotienten $\frac{f(a)}{f'(a)}$, welche eigentlich gesucht werden, keinen Einfluß; man braucht also nur die Ziffern des Divisors anzuwenden, welche durchaus nothwendig sind.

O u g t h r e d, Verfasser des Werkes: Artis analyticae praxis, hat eine Regel für die abgekürzte Multiplication der Zahlen gegeben; und ein ähnliches Verfahren ist auch für die Division bekannt, wenn man nur eine gewisse Anzahl der Ziffern des Quotienten sucht. Aber wir müssen hier einer andern Bedingung genügen, welche darin besteht, die Ziffern des Divisors nur successive in Betrachtung zu ziehen, um die Operation beliebig weit fortsetzen zu können; und vorzüglich muß man mit Gewißheit wissen, daß die gefundene Ziffer des Quotienten genau ist. Die Regel für diese g e o r d n e t e D i v i s i o n ist folgende:

Man bezeichne einige der ersten Ziffern des Divisors, z. B. die zwei, drei oder vier ersten Ziffern mit einem darüber gesetzten Querstrich, so soll der aus diesen Ziffern bestehende Theil des Divisors der b e z e i c h n e t e D i v i s o r heißen. Hierauf dividire man den gegebenen Dividend durch den b e z e i c h n e t e n D i v i s o r auf die gewöhnliche Art; jedoch mit dem Unterschiede, daß man jeden Partialdividend, welcher aus dem durch die vorhergehende Operation erhaltenen Reste und der dazu heruntergezogenen Ziffer des Totaldividends besteht, um eine gewisse Größe v e r b e s s e r t, wodurch man einen v e r b e s s e r t e n P a r t i a l d i v i d e n d erhält. Alsdann untersucht man, wie vielmal der bezeichnete Divisor in diesem letzten Dividend enthalten ist, setzt die gefundene Ziffer in den Quotienten,

und subtrahirt das Product aus dieser Zahl und dem bezeichneten Divisor von dem verbesserten Partialdividend. Zu dem Reste setzt man die folgende Ziffer des Dividends herunter, und setzt die Operation nach derselben Regel fort.

Um die erwähnte Correction des Partialdividends zu finden, setzt man die bereits gefundenen m Ziffern des Quotienten, in umgekehrter Ordnung geschrieben, unter die auf den bezeichneten Divisor folgenden m Ziffern des Divisors, multiplicirt jede Ziffer mit der unter ihr stehenden und addirt die m Producte. Jedesmal, wenn man zu dem Reste eine Ziffer des Dividends heruntergesetzt hat, muß man untersuchen, ob der Rest größer ist, als die Summe der bereits gefundenen, als Einer betrachteten Ziffern des Quotienten, oder ihr wenigstens gleich. Wenn diese Bedingung erfüllt wird, so ist die zuvor gefundene Ziffer des Quotienten zuverlässig richtig.

§ 21. Wenn man zum bezeichneten Divisor nur eine, oder zwei, oder im Allgemeinen eine zu kleine Anzahl von Ziffern genommen hat; so kann es geschehen, daß die vorhin ausgesprochene Bedingung nicht erfüllt wird; d. h. der Rest einer vorhergehenden Operation ist kleiner als die Summe der bereits gefundenen Ziffern des Quotienten, und alsdann ist die letzte dieser Ziffern unsicher. In diesem Falle fährt man mit der Anwendung der gegebenen Regel fort, indem man eine Ziffer des Dividends heruntersetzt und die vorgeschriebene Correction anbringt. Wenn diese Verbesserung nicht vorgenommen werden könnte, so wäre die letzte Ziffer des Quotienten zu groß; man müßte sie folglich um eine Einheit vermindern. Wenn aber die Verbesserung vollzogen werden kann, so setzt man zu dem Reste der letzten Subtraction die folgende Ziffer des Dividends herunter, welches einen neuen Partialdividend gibt. Zu gleicher Zeit nimmt man zu dem bezeichneten Divisor eine Ziffer mehr und verfährt bei der Verbesserung des neuen Partialdividends nach der vorigen Regel, d. h. man setzt die schon gefundenen m Ziffern des Quotienten in umgekehrter Ordnung unter die auf den neuen bezeichneten Divisor folgenden Ziffern des Divisors, etc. Hat man den neuen verbesserten Partialdividend gebildet, so verfährt man mit dem neuen bezeichneten Divisor, wie mit dem vorhergehenden bezeichneten Divisor. Man könnte auch den ersten bezeichneten Divisor wieder nehmen, und im Allgemeinen die Anzahl der Ziffern des bezeichneten Divisors im Laufe der Operation beliebig vergrößern oder verkleinern, wenn man zu gleicher Zeit die Zahl der Correctionen vergrößerte oder verkleinerte.

Die Anwendung der eben beschriebenen Operation wird zeigen, wie leicht sie ist, wenn sie mit Ordnung geführt wird. Aus dem bloßen Anblicke der Zahlen kann man das Resultat jeder Correction bilden. Denn wenn man die gefundenen m Ziffern des Quotienten in umgekehrter Ordnung auf ein besonderes Stück Papier schreibt, und sie unter die, rechts auf den bezeichneten Divisor folgenden m Ziffern des Divisors legt; so kann man leicht die Summe der Producte der correspondirenden Ziffern bilden, ohne die Partial-

producte niederzuschreiben. Man braucht, von der Rechten nach der Linken gehend, nur die Einer dieser Producte zu addiren, und indem man nach der Rechten zurückgeht, bloß die Zehner derselben zu addiren.

Vermöge dieser Bemerkung kann man leicht das Product zweier, aus beliebig vielen Ziffern bestehenden Factoren nach dem bloßen Anblicke derselben bilden. Sind z. B. die Factoren 2 3 4 5 6 7 und 8 9 0 9 8 7 6 gegeben und man schreibt sie auf zwei besondere Stücken Papier; so kann man nach der bloßen Ansicht dieser beiden Zahlen die Ziffern ihres Productes 2 0 8 9 9 6 2 8 8 3 6 9 2 dictiren, ohne irgend eins der Partialproducte niederzuschreiben, wie es die gewöhnliche Multiplication fordert.

Das in § 20 beschriebene Verfahren der geordneten Division lehrt die richtigen Ziffern des gesuchten Quotienten mit Zuverlässigkeit finden, und es werden nur dann neue Ziffern des Divisors angewandt, wenn dieses zur Bestimmung neuer Theile des Quotienten erforderlich ist. Dieses Verfahren hat den Vorzug, daß alle überflüssigen Rechnungen vermieden werden, und besonders den Vorzug, daß es beliebig weit fortgesetzt werden kann und dennoch immer genaue Ziffern des Quotienten gibt. Man muß es jedesmal anwenden, wenn der Divisor viele Ziffern hat, und nur die ersten Ziffern des Quotienten gesucht werden.

Wir könnten mehrere sehr nützliche Anwendungen des Verfahrens der geordneten Division anführen; allein unser Hauptobject besteht hier bloß in der Vervollkommnung der Berechnung der Wurzeln der Zahlengleichungen. Wir übergehen den Beweis dieser Regel, weil er sich leicht führen läßt, wenn man bemerkt, daß im decadischen Zahlensysteme jede Zahl durch die Formel:

$$10^n a_0 + 10^{n-1} a_1 + 10^{n-2} a_2 + \ldots + 10^2 a_{n-2} + 10 a_{n-1} + a_n$$

ausgedrückt werden kann, und daß das Product des Divisors und Quotienten dem Dividend gleich ist. Der Zweck jeder Correction ist: vom Dividend die Summe der Producte abzuziehen, deren Ordnung dieselbe ist, als die der zuletzt heruntergesetzten Ziffer des Dividends.

Erstes Beispiel.

Der erste Partialdividend ist =1234; der bezeichnete Divisor =234.

```
12345'6'7'8'9'8'7'3647 | 2345'6'7'8'9'8'7'6.5
1170                   | 52631589....
                       |        7
 645' (64>5, die Ziffer 5 ist also zuverlässig richtig)
  25 =5.5 (Correction)
 620... 2ter verbesserter Partialdividend
 468
 1526' (152>5+2; also die Ziffer 2 sicher)
   40 =5.6+2.5 (Correction)
 1486... 3ter verbesserter Partialdividend
 1404
   827' (82>5+2+6; die Ziffer 6 ist folglich sicher)
    77 = 5.7+2.6+6.5 (Correction)
   750... 4ter verbesserter Partialdividend
   702
    488' (48>5+2+6+3; also 3 richtig)
    105 = 5.8+2.7+6.6+3.5 (Correction)
    383... 5ter verb. Partialdividend
    234
    1499' (149>5+2+6+3+1; also Ziffer 1 gut)
     126 = 5.9+2.8+6.7+3.6+1.5 (Correction)
    1373... 6ter verbesserter Partialdividend
    1170
     2038' (203>5+2+6+3+1+5; also 5 richtig)
      158 =5.8+2.9+6.8+3.7+1.6+5 5 (Correction)
     1880... 7ter verbesserter Partialdividend
     1872
          87' (8<5+2+6+3+1+5+8; 8 ist also
                 unsicher)
        206 = Correction, welche nicht vorgenommen werden
                 kann; also ist die Ziffer 8 zu groß;
      1638 (man setzt also 7 statt 8 im Quotienten)
        2427' (242>5+2+6+3+1+5+7; 7 ist also gut)
         201 = 5.7+2.8+6.9+3.8+1.7+5.6+7.5
        2226... 8ter corrigirter Partialdividend
        2106
         120 (120>5+2+6+3+1+5+7+9, also
                 9 richtig).
```

Zweites Beispiel.

Erster Partialdividend = 24, bezeichneter Divisor = 9.

```
246'8'3'5'7'9'24 | 97'5'3'8'6'4'579
18               | 253064....
--
 66' (6 > 2; also die Ziffer 2 sicher)
 14 = 2.7 (Correction)
 --
 52... 2ter corrig. Partialdividend
 45
 --
  78' (7 = 2 + 5; also 5 richtig)
  45 = 2.5 + 5.7
  --
  33... 3ter verbesserter Partialdividend
  27
  --
   63' (6 < 2 + 5 + 8; also Ziffer 8 unsicher)
   52 = 2.3 + 5.5 + 8.7 (Correction ist möglich, also die
        Ziffer 5 richtig; aber man setzt sogleich die folgende
        Ziffer 5 des Dividends herunter und nimmt 97 zum
        neuen bezeichneten Divisor)
   ---
   115'
    46 = 2.8 + 3.5 + 3.5
   ---
    69... neuer corrig. Partialdividend
     0
   ---
    697
     61 = 2.6 + 5.8 + 3.3 + 0.5
    ---
    636... 2ter neuer verbess. Partialdividend
    582
    ---
     549' (54 > 2 + 5 + 3 + 0 + 6; also 6 gut)
      92 = 2.4 + 5.6 + 3.8 + 0.3 + 6.5
     ---
     457... 3ter neuer verbess. Partialdividend
     388
     ---
      69 (69 > 2 + 5 + 3 + 0 + 6 + 4; also 4 sicher).
```

§ 22. Vermittelst der so eben für die Division zweier Zahlen gegebenen Regel lassen sich auch die Gleichungen des zweiten Grades auflösen, und sie kann im Allgemeinen auf die Entwickelung der Wurzel jeder beliebigen Gleichung angewandt werden. Wir wollen das Verfahren nur an einigen Beispielen zeigen.

Wenn die Gleichung des zweiten Grades:

$$x^2 + 765432\,x = 123456$$

gegeben ist, so kann sie auf die Form gebracht werden:

$$x = \frac{123456}{765432 + x}.$$

Man dividirt folglich **123456** durch **765432** nach der Regel in § **20** und kann **765** zum bezeichneten Divisor nehmen. Die erste Ziffer **1** des Quotienten drückt offenbar Zehntel aus und für die folgende findet man **6**; so daß der Werth des Quotienten $x = 0{,}16\ldots$ ist. Man hängt also die Ziffern **16** dem Divisor **765432** an und setzt die Division fort, weil der Nenner gebildet wird, wenn man zu der Zahl **765432** den Quotienten $x = 0{,}16$ addirt. Jede gefundene neue Ziffer des Quotienten wird an ihre gehörige Stelle gesetzt und im Laufe der Operation angewandt, wie es die Regel fordert. Die Wurzel der Gleichung des zweiten Grades ist, wie man sieht, der Quotient einer Division, deren Divisor veränderlich ist. Da man nun nach der Regel in § **20** die Ziffern des Divisors nur successive anwendet, so braucht man sie zu Anfang der Operation nicht alle zu kennen; es ist hinreichend, sie successive zu suchen, und die gefundene jedesmal dem Divisor anzuhängen. Die gewöhnliche Divisionsregel würde sich hier nicht anwenden lassen, weil sie voraussetzt, daß alle Ziffern des Divisors gleich zu Anfang der Operation bekannt sind. Die Rechnung, welche ein drittes Beispiel für die geordnete Division darbietet, ist folgende:

```
12345'6'0'0'0'0'0'...  | 7654'3'2',1'6'1'2' ...
 765                   |--------------------
 ----                  | 0,16128927 ...
 4695'
    4
 ----
 4691
 4590
 ----
  1016'
    27
  ----
   989
   765
  ----
   2240'
     24
   ----
   2216
   1530
   ----
    6860'
      24
    ----
    6836
    6120
    ----
     7160'
       52
     ----
     7108
     6885
     ----
      2230'
       102
      ----
      2128
      1530
      ----
       5980'
         67
       ----
       5913
       5355
       ----
        558
```

§ 23. In dem vorhergehenden Beispiele bestand der veränderliche Divisor aus einer constanten Zahl, zu welcher der Quotient addirt ist. Dieser veränderliche Theil des Divisors könnte das Quadrat des Quotienten sein, oder dieses Quadrat dividirt durch eine gewisse Zahl, oder im Allgemeinen eine kleine Größe, welche einer gewissen Function des Quotienten gleich ist. Man braucht anfangs nur die ersten genauen Ziffern des Quotienten zu kennen, und man bildet den veränderlichen Theil, welcher dem Divisor angehängt werden muß, successive. Die neuen Ziffern des Divisors sind demnach bekannt, wenn sie bei den durch die Regel vorgeschriebenen Correctionen gebraucht werden müssen. Auf diese Weise gelangt man zu dem Ausdrucke der Wurzeln der Gleichungen eines beliebigen Grades, und der sogenannten transcendenten Gleichungen. Wir wollen uns bei dieser exegetischen Methode nicht länger aufhalten, wie allgemein sie auch sei, weil die Regeln, welche wir zur Berechnung der Wurzeln geben, weit schneller und leichter zum Ziele führen. Diese Anwendung der geordneten Division setzt voraus, daß die Gleichung gehörig eingerichtet sei; aber diese Transformation, und die, welche im Laufe der Operation nöthig werden können, reduciren sich immer darauf, den Werth der Wurzel um eine ihr sehr nahe kommende Größe zu vermindern, und dieses läßt sich vermittelst der früher gegebenen Regeln immer leicht bewerkstelligen. Kennt man zwei erste, sehr enge Grenzen, so lassen sich die ersten Operationen leichter fortsetzen, indem man zur successiven Bestimmung aller Theile der Wurzel eine gleichförmige Methode anwendet. Es war in den vorhergehenden Paragraphen bloß unsere Absicht, einige merkenswerthe Anwendungen von unserer neuen Divisionsregel zu geben. In derselben Absicht führen wir noch folgendes Beispiel an. Die gegebene Gleichung sei:

$$x^3 + 345x = 12,$$

so kann sie auf die Form gebracht werden:

$$x = \frac{12}{345 + x^2}.$$

Man dividirt also 12 durch 345 nach der Regel der geordneten Division, und hängt dem Divisor successive die Ziffern an, welche denselben vervollständigen müssen. Es ist zu bemerken, daß diese Ziffern zu Anfang der Operation nicht bekannt sind; aber sie werden successive gefunden, wenn man den Werth des Quotienten zum Quadrat erhebt, und auf folgende Weise verfährt: Wenn man einige der ersten Ziffern des Quotienten kennt, so bestimmt man die ersten Ziffern des Quadrates des Quotienten, indem man von diesem Werthe des Quadrates nur die Ziffern beibehält, welche zuverlässig genau sind, und diese Ziffern müssen dem Divisor successive beigesetzt werden. Auf diese Weise findet man die Wurzel der Gleichung $x^3 + 345x = 12$, nämlich $x = 0{,}034782486\ldots$ Die Rechnungen erhellen aus folgender Uebersicht:

```
12,0'0'0'0'0'0'0'0'0'  | 345,0'0'1'2'0'9'8'...
1035                   |-------------------
----                   | 0,034782486...
 1650'
    0
 ----
 1650
 1380
 ----
  2700'
     0
  ----
  2700
  2415
  ----
   2850'
      3
   ----
   2847
   2760
   ----
     870'
      10
     ---
     860
     690
     ----
     1700'
       15
     ----
     1685
     1380
     ----
      3050'
        49
      ----
      3001
      2760
      ----
       2410'
         78
       ----
       2332
       2070
       ----
        262
```

34
34
136
102
$0,00\,1156 = (0,034)^2$
68
1
$0,001225 = (0,035)^2$

1156
238
238
49
$0,00\,120409 = (0,0347)^2$
694
1
$0,00121104 = (0,0348)^2$

120409
2776
2776
64
$0,00\,12096484 = (0,03478)^2$
6956
1
$0,0012103441 = (0,03479)^2$

12096484
6956
6956
4
$0,0\,01209787524 = (0,034782)^2$
69564
1
$0,001209857089 = (0,034783)^2$

1209787524
139128
139128
16
$0,00120981534976 = (0,0347824)^2$
695648
1
$0,00120982230625 = (0,0347825)^2$

§ 24. Wir haben in § 19 die Aufgaben angeführt, welche gelöſt werden müßten, um die Berechnung der Wurzeln auf das ein-

fachste Verfahren zurückzuführen; so daß man auf keinem kürzern Wege zur wirklichen Kenntniß der Werthe der Wurzeln gelangen könnte. Die erste dieser Aufgaben ist rein arithmetisch und durch die Regel der geordneten Division gelös't. Die zweite, deren Auflösung sehr leicht ist, besteht darin: den Calcul der successiven Substitutionen so zu ordnen, daß keine unnützen Rechnungen vorkommen. Das Object der dritten Aufgabe besteht in der Bestimmung der zuverlässig genauen Ziffern, welche jede neue Operation gibt. Wir werden sogleich zeigen, welchen Gang der Calcul nehmen muß, damit diese letztern Bedingungen erfüllt werden.

Wir setzen zuerst voraus, man habe in den ersten Theil $f(x)$ der gegebenen Gleichung und in $f'(x)$, $f''(x) \ldots f^{(n-1)}(x)$ einen Näherungswerth b der Wurzel x substituirt, und durch diese Substitutionen die Zahlenwerthe der Functionen $f(b)$, $f'(b)$, $f''(b)$, $f'''(b) \ldots (f^{(n-1)}(b)$ bestimmt; so findet man einen neuen Theil β der Wurzel, wenn man $f(b)$ durch $f'(b)$ dividirt, und zur Fortsetzung der Approximation ist erforderlich, $b+\beta$ in die Functionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x) \ldots f^{(n-1)}(x)$ zu substituiren. Es ist klar, daß der Calcul schlecht geordnet wäre, wenn man die ganze Größe $b+\beta$ substituirte; denn man würde unnöthigerweise einen beträchtlichen Theil der frühern Operationen wiederholen. Man muß also bloß die Rechnungen vornehmen, welche zur Bestimmung des von β herrührenden Theiles der Wurzel durchaus erforderlich sind. Wenn man nur einen wenig genäherten Werth der Wurzel haben will, so kann man diese Reductionen weglassen; aber wenn man eine sehr große Anzahl der Ziffern der Wurzel bestimmen will, so ist leicht einzusehen, daß es sehr vortheilhaft ist, dem Calcul eine andere Form zu geben.

Aus dem Taylorschen Lehrsatze ergibt sich aber leicht, daß man für die Substitution des Werthes $b+\beta$ in die Functionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$,.. folgende Regel beobachten muß.

Nachdem man die schon bekannten Werthe $f(b)$, $f'(b)$, $f''(b)$,... $f^{(n-1)}(b)$, $f^{(n)}(b)$ in eine Reihe geschrieben hat, multiplicirt man alle auf die erste Function $f(b)$ folgende Functionen mit β, wodurch die Glieder einer zweiten Reihe erhalten werden.

Alle auf das erste Glied zur Linken folgenden Glieder dieser zweiten Reihe multiplicirt man mit β, und dividirt jedes Product durch 2; so erhält man die Glieder einer dritten Reihe.

Jedes auf das erste Glied zur Linken folgende Glied dieser dritten Reihe multiplicirt man wieder mit β, und dividirt jedes Product mit 3.

Auf diese Weise fährt man fort, alle Glieder jeder Reihe, mit Ausnahme des ersten zur Linken, mit β zu multipliciren und jedes Product durch den Index des Ranges der Reihe zu dividiren.

Hierauf addirt man die ersten Glieder der verschiedenen Reihen, so findet man $f(b+\beta)$. Addirt man alle zweiten Glieder der verschiedenen Reihen, so findet man $f'(b+\beta)$. Ebenso addirt man alle dritten und alle vierten Glieder der verschiedenen Reihen, welches $f''(b+\beta)$ und $f'''(b+\beta)$ gibt, u. s. f., bis die Zahlenwerthe von allen Functionen $f(b+\beta)$, $f'(b+\beta)$, $f''(b+\beta)$,.... bekannt sind.

Wenn man diese Zahlenwerthe gebildet hat, so findet man einen neuen Theil γ der Wurzel, wenn man $f(b+\beta)$ durch $f'(b+\beta)$ dividirt. Es bleibt also noch zu bestimmen übrig, wie viele genaue Ziffern diese Division geben muß.

§ 25. Nachdem man eine der Grenzen, z. B. die, welche die newtonsche Approximationsmethode gibt, berechnet hat, könnte man die zweite Grenze berechnen, welche wir zur Verbindung mit dieser ersten Grenze vorgeschlagen haben, und welche in der That zur Bestimmung der Approximation nothwendig ist. Wenn die zweite Grenze berechnet würde, so behielte man nur die den beiden Grenzen gemeinschaftlichen Ziffern als genau bei, und fände so den Bruch γ, welcher β angehängt werden muß. Wenn man auf diese Weise verfahren wollte, so würde man einen großen Theil des frühern Zahlencalculs wiederholen. Wir werden diese Operation auf ihre einfachste Form zurückführen, indem wir bloß die Differenz zwischen der zweiten und ersten Grenze betrachten. Denn es ist in § 9 bewiesen, daß man die zweite Grenze unmittelbar bestimmen kann, wenn die erste bekannt ist. Es seien a und b zwei erste Näherungswerthe, wovon der erste a kleiner, und der zweite b größer ist, als die gesuchte Wurzel. Diese Werthe sind nach der Voraussetzung so beschaffen, daß die Gleichung $f(x)=0$ zwischen den Grenzen a und b eine, jede der subordinirten Gleichungen $f'(x)=0$, $f''(x)=0$, $f'''(x)=0$ aber keine Wurzel hat. Daß die beiden Zahlen a und b diese Bedingung erfüllen, ergibt sich aus der Vergleichung der beiden Zeichenreihen (a) und (b), indem man findet, daß die den Functionen $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$ entsprechenden Indices gleich Null sind, d. h. wenn sich die Reihe der Indices mit 0001 schließt. Wenn die den Functionen $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$ entsprechenden Indices nicht gleich Null wären, so müßte man die beiden Grenzen durch Substitution zwischenliegender Zahlen zusammenziehen und man würde bald dahin gelangen, zwei Grenzen a und b zu finden, durch welche die in Rede stehende Bedingung erfüllt würde. Wir betrachten hier zufolge § 14 die besondern Fälle, wo eine der Functionen $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$ mit der gegebenen Function $f(x)$ einen gemeinschaftlichen Factor hätte, nicht.

Alsdann wähle man von den beiden Grenzen a und b diejenige, welche, in die Functionen $f'(x)$ und $f''(x)$ substituirt, zwei Resultate von demselben Zeichen gibt. Wir wollen diese Grenze, welche wir die äußere Grenze genannt haben, und welche dem Punkte der Curve entspricht, durch welchen die Tangente gezogen werden muß, wie im § 16., mit β bezeichnen. Die innere Grenze soll mit α bezeichnet werden. Aus diesen ersten Werthen β und α leitet man nun, wie in dem angeführten Paragraphe gezeigt worden, neue mehr genäherte Werthe β' und α' ab, zwischen welchen die Wurzel ebenfalls liegt und welche durch:

$$\beta'=\beta-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)},\quad \alpha'=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\beta)}$$

ausgedrückt werden.

Bezeichnet man ferner die Differenz $\beta-\alpha$ der beiden ersten

Grenzen mit i und die Differenz $\beta'-\alpha'$ der neuen, mehr genäherten Grenzen mit i', so wird die Differenz i' weit kleiner sein als i, und man wird zwischen diesen beiden Größen die Relation:

$$i' = i^2 \cdot \frac{f''(\alpha\ldots\beta)}{2f'(\beta)}$$

haben (§ 9), wo $f''(\alpha\ldots\beta)$ den Werth ausdrückt, welchen $f''(x)$ bekommt, wenn man der Veränderlichen x einen zwischen den bekannten Zahlen α und β liegenden Werth gibt.

Wenn die Differenz i unendlich klein würde, so würde die Differenz i' eine unendlich kleine Größe der zweiten Ordnung werden, und das Verhältniß dieser Größe i' zu dem Quadrate von i ist eine endliche Größe. Denn da alsdann die beiden Grenzen α und β beide der Abscisse des Durchschnittspunktes mit der Axe, d. h. der Wurzel x gleich werden, so ist der Ausdruck dieses Verhältnisses:

$$\frac{f''(x)}{2f'(x)}.$$

Je mehr die Grenzen α und β einander genähert sind, desto mehr nähert sich das Verhältniß der Differenz i' der beiden neuen Grenzen α' und β' zu dem Quadrate der Differenz i der beiden ersten Grenzen α und β der Größe $\frac{f''(x)}{2f'(x)}$, so daß dieses Verhältniß beliebig wenig von dieser Größe verschieden sein kann.

Der Werth der Größe $\frac{f''(x)}{2f'(x)}$, d. h. des letzten Verhältnisses der Differenz der beiden Grenzen zu dem Quadrate der Differenz der vorigen Grenzen läßt sich nicht genau bestimmen, weil er von der unbekannten Wurzel x abhängt; aber der Ausdruck $\frac{f''(\alpha\ldots\beta)}{2f'(\beta)}$ bietet ein leichtes Mittel dar, zu bestimmen, zwischen welchen Grenzen dieses letzte Verhältniß enthalten ist. Denn da die Gleichung $f'''(x)$ nach der Voraussetzung zwischen den Grenzen α und β keine Wurzel hat, so wird die Function $f''(x)$ zwischen diesen Grenzen stets wachsen, oder abnehmen. Dasselbe gilt von der Function $f'(x)$, weil die Gleichung $f''(x)=0$ zwischen α und β keine Wurzel hat. Bezeichnet man also mit $f''(B)$ die größte der beiden Größen $f''(\alpha)$ und $f''(\beta)$, ohne Rücksicht auf das Zeichen, und mit $f'(a)$ die kleinste der Größen $f'(\alpha)$ und $f'(\beta)$; so ist der Quotient:

$$\frac{f''(B)}{2f'(a)}$$

nothwendig größer als $\frac{f''(x)}{2f'(x)}$ und dieser Quotient wird im Allgemeinen immer größer sein als $\frac{f''(\alpha\ldots\beta)}{2f'(\beta)}$.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß, wenn man vermittelst der genäherten Werthe α und β, deren Differenz $= i$ ist, einen mehr genäherten Werth β' gebildet hat, welcher durch:

$$\beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$$

ausgedrückt wird, und zu diesem letztern Werthe die Größe:

$$-i^2 . \frac{f''(B)}{2f'(a)}$$

addirt, eine größere Größe als die Differenz der neuen Grenzen α' und β' addirt ist. Folglich liegt die gesuchte Wurzel zuverlässig zwischen den Größen:

$$\beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)},$$

und

$$\beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} - i^2 . \frac{f''(B)}{2f'(a)},$$

(wo $i = \beta - \alpha$ ist).

§ 26. Um aus dem ersten genäherten Werthe β', welcher der Abscisse $o\beta'$ (Fig. 11) entspricht, einen zweiten genäherten Werth herzuleiten, der so beschaffen ist, daß die Wurzel nothwendig zwischen diesen beiden Werthen liegt, könnte man statt der zweiten Grenze α', welche der Abscisse $o\alpha'$ entspricht, die durch den Durchschnittspunkt der Secante mn mit der Axe gegebene Grenze os betrachten. Die Abscisse ox des Durchschnittspunktes der Curve mit der Axe liegt zuverlässig zwischen den Abscissen os und $o\beta'$; und da diese neuen Grenzen weniger von einander entfernt sind, als die Grenzen $o\alpha'$ und $o\beta$, so würde die Anwendung derselben den Vortheil gewähren, daß man sich dem Werthe der Wurzel schneller näherte.

Die Differenz $\beta's$ zwischen dem ersten genäherten Werthe und der Abscisse des Durchschnittspunktes der Secante mit der Axe findet man, wenn man das oben mit i' bezeichnete Intervall $\alpha'\beta'$ in zwei, den Ordinaten $n\beta$ und $m\alpha$ proportionale Theile theilt. Diese Ordinaten werden resp. ausgedrückt durch $f(\beta)$ und $-f(\alpha)$ und der erste Theil $\beta's$ ist folglich:

$$i^2 \frac{f''(\alpha \ldots \beta)}{2f'(\beta)} . \frac{f(\beta)}{f(\beta) - f(\alpha)}.$$

Da der absolute Werth dieser Differenz kleiner ist als:

$$i^2 \frac{f''(B)}{2f'(a)} . \frac{f(\beta)}{f(\beta) - f(\alpha)},$$

so folgt, daß die Wurzel zuverlässig zwischen den beiden Größen:

$$\beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$$

und

$$\beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} - i^2 \frac{f''(B)}{2f'(a)} \cdot \frac{f(\beta)}{f(\beta)-f(\alpha)}$$

liegt.

Obgleich aber diese neuen Grenzen den Vortheil einer schnellern Approximation darbieten, so ist die Anwendung der vorhergehenden doch leichter, und man wird finden, daß sie bei der Berechnung der Wurzeln den Vorzug verdienen. Es bleibt nun noch übrig, zu zeigen, wie man vermittelst der bekannten zweiten Grenze $\beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} - i^2 \frac{f''(B)}{2f'(a)}$ die Rechnung so ordnen kann, daß immer bloß genaue Ziffern bestimmt werden, d. h. solche, welche dem wahren Werthe der Wurzel angehören.

§ 27. Wenn die Differenz i der beiden ersten genäherten Werthe α und β eine Decimaleinheit einer ziemlich hohen Ordnung ist, so ist die Differenz i' der neuen genäherten Werthe α' und β' im Allgemeinen eine Decimaleinheit einer weit höhern Ordnung. Wenn z. B. der Werth des Coefficienten $\frac{f''(B)}{2f'(a)}$ die Einheit nicht übertrifft, so ist die Differenz i' kleiner als das Quadrat der vorhergehenden Differenz i. Ist folglich die letzte Decimalziffer des genäherten Werthes β von der Ordnung n und man bildet einen mehr genäherten Werth β', indem man zu β den Quotienten $-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ addirt; so sind alle Decimalziffern des Resultates, welche vor der Decimalziffer der $2n$ten Ordnung vorhergehen, zuverlässig genau. Denn der Werth $\beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$, welcher größer ist als die Wurzel, würde kleiner werden, wenn man i^2 oder eine Decimaleinheit der Ordnung $2n$ davon subtrahirte. Also kann man bei der Berechnung des Quotienten $-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ alle Decimalziffern bis zu der von der $2n$ten Ordnung beibehalten, aber man darf die folgenden Ziffern nicht als der Wurzel angehörig betrachten. Es ist daher überflüssig, sie zu bestimmen, und man muß die Division nicht weiter treiben, als bis zu der Ziffer, welche eine gewisse Anzahl Einheiten der $2n$ten Ordnung ausdrückt. Hieraus erhellet, daß alsdann jede Operation doppelt so viele genaue Decimalziffern gibt, als bereits bekannt waren.

Wenn der Werth des Coefficienten $\frac{f''(B)}{2f'(a)}$ größer, oder kleiner ist als die Einheit, so ist die Anzahl der neuen genauen Decimalziffern, welche man erhält, wenn man $f(\beta)$ durch $f'(\beta)$ dividirt, kleiner oder größer als die doppelte Anzahl der schon bekannten Decimalziffern. Um mit Zuverlässigkeit zu bestimmen, bis zu welcher Decimalstelle der Quotient dieser Division entwickelt werden muß, verfährt man nach folgender Regel.

Man untersuche, von welchem Range die erste Ziffer des Quotienten $\frac{f''(B)}{2f'(a)}$ ist und bemerke die unmittelbar höhere Decimaleinheit als der Werth dieses Quotienten. Wenn z. B. 0,003 die ersten Ziffern des Quotienten $\frac{f''(B)}{2f'(a)}$ wären, so würde man 0,01 für diese Decimaleinheit nehmen, und wenn die erste Ziffer dieses Quotienten 3 Tausender wären; so würde man 10000 für diese nächst höhere Decimaleinheit nehmen. Nun sei $(\frac{1}{10})^k$ diese Decimaleinheit, welche größer ist als der in Rede stehende Quotient, wo der Exponent k positiv oder negativ sein kann, und $(\frac{1}{10})^n$ sei die Decimaleinheit, welche der Differenz i der beiden ersten, mit α und β bezeichneten Grenzen gleich ist. Da der Coefficient $\frac{f''(B)}{2f'(a)}$ kleiner ist als $(\frac{1}{10})^k$, so wird der Ausdruck $i^2 . \frac{f''(B)}{2f'(a)}$ kleiner sein als $(\frac{1}{10})^{2n+k}$ und wenn man $f(\beta)$ durch $f'(\beta)$ dividirt; so muß man bei der Decimalziffer von der Ordnung $2n+k$ stehen bleiben. Denn wenn man den Quotienten $-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ zu dem schon bekannten Theile β der Wurzel addirt, so erhält man ein Resultat, welches von dem wahren Werthe der Wurzel um eine kleinere Größe verschieden ist, als die Differenz der beiden Größen $\beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ und $\alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\beta)}$. Nun ist aber diese Differenz, welche durch $-i^2 . \frac{f''(\alpha \ldots \beta)}{f'(\alpha \ldots \beta)}$ ausgedrückt wird, ohne Rücksicht auf das Zeichen, selbst kleiner als $(\frac{1}{10})^{2n} . (\frac{1}{10})^k$. Wenn man also die durch $-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ angezeigte Division bis zu der Decimalziffer der Ordnung $2n+k$ verrichtet, so kann man sicher sein, daß der Fehler des Resultats, welches man erhält, kleiner ist als eine Decimaleinheit dieser Ordnung. Man braucht also nur noch auf den Theil des Quotienten Rücksicht zu nehmen, welcher weggelassen ist.

§ 28. Nun muß man bemerken, daß die durch β bezeichnete Grenze, aus welcher ein mehr genäherter Werth β' abgeleitet wird, indem man zu β den Quotienten $-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ addirt, immer die sogenannte äußere Grenze ist, d. h. diejenige, welche, in die Functionen $f(x)$ und $f''(x)$ substituirt, zwei Resultate von demselben Zeichen gibt. In den durch die Figur 6 und 9 dargestellten Fällen entspricht diese Grenze β dem Punkte b und in den durch Figur 7 und 8 dargestellten Fällen entspricht diese Grenze dem Punkte a. Es erhellet aber schon aus der bloßen Betrachtung der Figuren, daß man sich in allen Fällen von dem Werthe der Wurzel entfernt, wenn man den absoluten Werth der Subtangente etwas zu klein nimmt

und daß man sich im Gegentheil demselben nähert, wenn man diesen Werth etwas zu groß nimmt. Anders würde sich die Sache verhalten, wenn die Tangente in den Figuren 6 und 9 durch den Punkt m, oder in den Figuren 7 und 8 durch den Punkt n gezogen wäre, und man müßte alsdann den wahren Werth der Subtangente lieber etwas zu klein als zu groß nehmen. Wenn man aber die äußere Grenze β, welche sich immer leicht nach der vorhin ausgesprochenen Bedingung unterscheiden läßt, anwendet; so ist einleuchtend, daß man, um den neuen genäherten Werth β' zu bilden, zu β lieber eine Größe addiren muß, welche etwas größer ist als der Quotient $-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$, wodurch die Subtangente ausgedrückt wird, als eine Größe, welche kleiner ist als der wahre Werth dieses Quotienten.

Aus dieser Bemerkung folgt, daß man, nachdem die durch $-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ angezeigte Division bis zu der Decimalziffer der Ordnung $2n+k$ incl. entwickelt ist, statt aller folgenden wegzulassenden Ziffern, die Ziffer der Ordnung $2n+k$, bei welcher man stehen geblieben ist, um eine Einheit vermehren muß. Das auf diese Weise erhaltene Resultat addirt man folglich mit Rücksicht auf sein Zeichen zu der Grenze β und erhält so die gesuchte neue, mehr genäherte Grenze β'.

Wir wollen übrigens bemerken, daß man bei dieser Bildung der neuen, mehr genäherten Grenze β', d. h. indem man in der durch $-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ angezeigten Division bei der Decimalziffer der $2n+k$ ten Ordnung stehen bleibt und diese Ziffer um eine Einheit vermehrt, zu dem wahren Werthe der Größe $\beta-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ eine Größe addirt, welche $(\frac{1}{10})^{2n+k}$ und folglich die Differenz $-i^2.\frac{f''(\alpha\ldots\beta)}{2f'(\alpha\ldots\beta)}$ der beiden neuen Grenzen nicht übersteigen kann. Folglich ist die neue Grenze β' um so mehr von der Wurzel um eine kleinere Größe als eine Decimaleinheit der Ordnung $2n+k$ verschieden. Aber diese neue Grenze β' kann größer oder kleiner sein als die Wurzel, welches man findet, wenn man sie in die Function $f(x)$ substituirt. Wenn die Grenze β' größer ist als die Wurzel, so erhält man die zweite Grenze α', indem man eine Einheit der letzten Decimalziffer abzieht. Ist dagegen die Grenze β kleiner als die Wurzel, so wird die zweite Grenze erhalten, wenn man zu der letzten Decimalziffer eine Einheit addirt. Auf diese Weise erhält man also zwei Zahlen, zwischen welchen die Wurzel nothwendig liegt und welche nur noch um eine Decimaleinheit der Ordnung $2n+k$ von einander verschieden sind.

Will man die Approximation fortsetzen, so verfährt man mit den beiden gefundenen neuen Grenzen wie mit den beiden vorhergehenden. Man unterscheidet die dieser beiden Grenzen, welche, in die Functionen $f(x)$ und $f''(x)$ substituirt, zwei Resultate von demselben Zeichen gibt. Es sei β_1 diese Grenze und n_1 die Decimal-

ordnung der letzten Ziffer derselben, so berechnet man den Quotienten $-\frac{f(\beta_1)}{f'(\beta_1)}$, welcher zu β_1 addirt werden muß, um eine neue, mehr genäherte Grenze zu erhalten, bis zur Decimalziffer der Ordnung $2n_1+k$ incl. und vermehrt diese Ziffer um eine Einheit. Also wird die Anzahl der genauen Decimalziffern, welche man bei jeder neuen Operation erhält, immer größer. Wenn n die Anzahl der ursprünglich bekannten Decimalziffern bezeichnet, d. h. wenn die gegebenen Grenzen α und β nur um $(\frac{1}{10})^n$ verschieden sind; so ist die Anzahl der genauen Decimalziffern, welche durch eine erste Operation erhalten werden, $2n+k$, nach einer zweiten Operation, $4n+3k$, nach einer dritten, $8n+7k$, u. s. w.

Die Approximation findet bei dieser näherungsweisen Berechnung der Wurzel nur dann regelmäßig und schnell statt, wenn die Zahl $2n+k$ größer ist als n oder wenn $n>-k$ ist, welches nicht würde geschehen können, wenn k oder n negativ wäre. Man muß also, nachdem man die Zahl k, welche der Exponent der Decimaleinheit der unmittelbar höhern Ordnung als die der ersten Ziffer des Quotienten $\frac{f''(B)}{2f'(a)}$ ist, bestimmt hat, sich überzeugen, ob die Bedingung $n>-k$ erfüllt ist. Wenn sie es nicht wäre, so müßte man die gegebenen Grenzen a und b durch die Substitution zwischenliegender Zahlen so lange zusammenziehen, bis die Differenz dieser beiden Grenzen gleich $(\frac{1}{10})^n$ wird, wo $n=1-k$ ist.

§ 29. Die vorhergehenden Betrachtungen führen zu folgender Regel.

Um, wenn zwei Grenzen a und b gegeben sind, zwischen welchen eine einzige Wurzel der gegebenen Gleichung $f(x)=0$ liegt, während die subordinirten Gleichungen $f'(x)=0$, $f''(x)=0$, $f'''(x)=0$ zwischen diesen Grenzen keine Wurzeln haben, zwei neue, einander so viel als möglich genäherte Grenzen zu finden, zwischen welchen die Wurzel der gegebenen Gleichung ebenfalls enthalten ist, nehme man von den beiden Größen $f''(a)$ und $f''(b)$ diejenige, welche den größten Zahlenwerth hat und dividire sie durch die von den beiden Größen $2f'(a)$ und $2f'(b)$, welche den kleinsten Zahlenwerth hat; so ist es hinreichend, bloß den Rang der ersten Ziffer dieses Quotienten zu kennen und die Einheit der unmittelbar höhern Decimalordnung als dieser Quotient zu bemerken. Es sei $(\frac{1}{10})^k$ diese Einheit, so ist die Zahl k, welche positiv oder negativ sein kann, bekannt.

Es sei $(\frac{1}{10})^n$ die Decimaleinheit, welche wenigstens der Differenz der beiden gegebenen Grenzen a und b gleich ist, und man untersuche, ob die Zahl n wenigstens $=1-k$ ist. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt wäre, so müßte man die Grenzen a und b durch Substitution zwischenliegender Zahlen zusammenziehen.

Hat man gefunden, daß die Bedingung $n=1-k$ oder $n>1-k$ erfüllt ist; so wählt man von den beiden Grenzen a und b diejenige, welche, in die Functionen $f(x)$ und $f''(x)$ substituirt, zwei Resultate von demselben Zeichen gibt. Sei β diese Grenze, und man

dividire $f(\beta)$ durch $f'(\beta)$ nach der Regel der geordneten Division, indem man die Division so weit fortsetzt, bis die zuletzt gefundene Ziffer des Quotienten von der Decimalordnung $2n+k$ ist. Diese letzte Ziffer vermehre man um eine Einheit und addire den so erhaltenen Quotienten zur Grenze β, oder man subtrahire denselben von dieser Grenze, jenachdem die Größen $f(\beta)$ und $f'(\beta)$ verschiedene oder gleiche Zeichen haben. Die auf diese Weise gebildete neue Grenze β' kann größer oder kleiner sein als der wahre Werth der Wurzel, welches sich leicht erkennen läßt, wenn man diesen Werth β' in $f(x)$ substituirt; aber sie wird von der Wurzel immer um eine kleinere Größe als $(\frac{1}{10})^{2n+k}$ differiren. Vermindert oder vermehrt man also die letzte Ziffer von β' um eine Einheit, so bildet man eine zweite Grenze, welche kleiner ist als die Wurzel, wenn die gefundene Grenze β' größer ist, und welche größer ist als die Wurzel, wenn die Grenze β' kleiner wäre.

Hierauf verfährt man mit diesen neuen Grenzen wie mit den ersten gegebenen a und b, u. s. f. Jede neue Operation gibt alsdann eine immer größere Anzahl von Ziffern, welche dem Werthe der Wurzel angehören. Die Anzahl der genauen Decimalziffern, welche nach der ersten, zweiten, dritten u. s. w. Operation auf das Komma folgen, wird resp. ausgedrückt durch $2n+k$, $4n+3k$, $8n+7k$, u. s. w. Wir haben übrigens den Exponenten k als eine constante Zahl betrachtet; es kann aber zuweilen geschehen, daß man für diese Zahl k einen größern Werth findet, als der erste, wenn man diesen Werth vermittelst mehr genäherter Grenzen berechnet, welche im Laufe der Operation erhalten werden. Hierdurch wird die schnelle Approximation nur befördert.

§ 30. Wir wollen die vorhergehenden Regeln auf die Gleichung:

$$x^3-2x-5=0$$

anwenden, so ist die Reihe der Functionen folgende:

$$f(x)=x^3-2x-5$$
$$f'(x)=3x^2-2$$
$$f''(x)=6x$$
$$f'''(x)=6;$$

und wenn man zuerst die Werthe (—1), (<0), (0), (>0), (1) und (10) substituirt, so findet man:

	$f'''(x)$,	$f''(x)$,	$f'(x)$,	$f(x)$
(—1)....	+	—	+	—
			1	4
(<0)....	+	—	—	—
			2	5
(0)	+	0	—	—
(>0)	+	+	—	—

(1)	+	+	+	—
(10)	+	+	+	+

Es werden drei Wurzeln der Gleichung angezeigt; zwei zwischen —1 und 0 und eine zwischen 1 und 10, und es ergibt sich unmittelbar, daß die beiden ersten Wurzeln imaginär sind, weil die Summe der Quotienten $\frac{4}{1}+\frac{5}{2}$ größer ist als die Differenz 1 der beiden Grenzen. Folglich hat diese Gleichung eine einzige, zwischen 1 und 10 liegende reelle Wurzel.

Um zwei Grenzen zu erhalten, welche nur um eine Einheit der Ordnung der letzten Ziffer verschieden sind, substituire man zwischenliegende Zahlen und man wird finden:

(2)	+	+	+	—
		12	10	1
	0	0	0	1
(3)	+	+	+	+.
		18	25	16

Also liegt die Wurzel zwischen 2 und 3, und da die Reihe der Indices 0001 ist, so könnte man zur Approximation fortschreiten. Aber wenn man den größten der Werthe von $f''(x)$, welcher gleich 18 ist, durch den kleinsten der Werthe von $2f'(x)$, welcher gleich 2.10 ist, dividirt; so erhält man zum Quotienten $\frac{18}{20}=0{,}9$ und da die Decimaleinheit der unmittelbar höheren Ordnung als die erste Ziffer dieses Quotienten $=1$ ist, so ist folglich $k=0$. Da die Differenz der beiden Grenzen, zwischen welchen die Wurzel liegt, auch gleich 1 ist; so ist ebenfalls $n=0$. Weil also die Bedingung $n=$ oder $>1-k$ nicht erfüllt ist, so sind die Grenzen 2 und 3 einander noch nicht hinreichend genähert, um die approximative Berechnung der Wurzel anfangen zu können.

Substituirt man also zwischenliegende Zahlen von der unmittelbar niedrigern Ordnung, so erhält man:

(2,0).....	+	+	+	—
		12	10	1
(2,1).....	+	+	+	+.
		12,6	11,23	0,061

Also liegt die Wurzel zwischen den Grenzen 2,0 und 2,1. Die Differenz dieser Grenze ist $\frac{1}{10}$; also $n=1$. Den größten der Werthe von $f''(x)$ durch den kleinsten der Werthe von $2f'(x)$ dividirt, gibt $\frac{12{,}6}{20}=0{,}6\ldots$ Da die Decimaleinheit der unmittelbar höhern Ordnung als lie erste Ziffer des Quotienten wieder $=1$ ist, so ist, wie oben, $k=0$. Die Bedingung $n=1-k$ ist also erfüllt und man kann folglih, ohne die Grenzen durch Substitution zwischenliegender Zahlen mehr zusammenzuziehen, zur Approximation fortschreiten.

Die größte Grenze 2,1 ist hier die äußere Grenze, welche durch β bezeichnet wurde, weil dieser Werth für die beiden Functionen $f(x)$ und $f''(x)$ dasselbe Zeichen + gibt. Man erhält also den ersten genäherten Werth der Wurzel, wenn man von $\beta = 2,1$ den Quotienten $\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \frac{0,061}{11,23}$ subtrahirt. Die Division muß bis zu der Decimalziffer von der Ordnung $2n + k$, d. h. hier bis zu Hunderteln verrichtet werden, und ehe man die Subtraction vornimmt, muß die letzte Ziffer um eine Einheit vermehrt werden. Da man $\frac{0,061}{11,23} = 0,00\ldots$ findet, so ist die von 2,1 zu subtrahirende Zahl $= 0,01$, und der erste genäherte Werth ist $= 2,09$. Dieser Werth ist wenigstens bis auf $\frac{1}{100}$ genau, aber man weiß noch nicht, ob er größer oder kleiner als die Wurzel ist. Um dieses zu finden und die Näherung weiter fortzusetzen, substituire man nach der Regel in § 24 den Werth 2,09 in die Reihe der Functionen. Diese Operation erhellet aus folgender Uebersicht:

$f(2)$,	$f'(2)$,	$f''(2)$,	$f'''(2)$
-1	10	12	6
	0,09	0,09	0,09
	0,90	1,08	0,54
		9	9
		972	486
		0,0486	0,0243
			9
			2187
			0,000729;

folglich ist:

$f(2,09) = 0,90$,	$f'(2,09) = 10$,	$f''(2,09) = 12$,	$f'''(2,09) = 6$
486	1,08	0,54	
729	243	12,54	
0,949329	11,1043		
-1			
$-0,050671$			

Da das Resultat der Substitution von 2,09 in $f(x)$ negativ ist, so ist diese Größe kleiner als der Werth der Wurzel, welche folglich zwischen den Grenzen 2,09 und 2,10 liegt. Da die Differenz dieser Grenzen $= \frac{1}{100}$ oder $\left(\frac{1}{10}\right)^2$ ist, so ist die Zahl n jetzt $= 2$ und folglich kann die folgende Näherung bis zu der Decimalziffer der vierten Ordnung getrieben werden. Man vollzeht also die Division $\frac{0,061}{11,23}$ bis zur vierten Decimalziffer incl., welches 0,0054

gibt, und wenn man die letzte Ziffer um eine Einheit vermehrt, 0,0055. Wird dieses Resultat von 2,10 subtrahirt, so erhält man zum zweiten Näherungswerthe 2,0945, welcher wenigstens bis auf $\frac{1}{10000}$ genau ist; aber man weiß nicht, ob die Zahl 2,0945 kleiner oder größer ist als die Wurzel. Die Substitution dieser Zahl in die Function $f(x)$ und in die abgeleiteten Functionen wird auf folgende Weise verrichtet:

$f(2{,}09)$,	$f'(2{,}09)$,	$f''(2{,}09)$,	$f'''(2{,}09)$
— 0,050671	11,1043	12,54	6
	0,0045	0,0045	0,0045
	555215	6270	30
	444172	5016	24
	0,04996935	0,056430	0,0270
		45	45
		282150	1350
		225720	1080
		2539350	12150
		0,0001269675	0,00006075
			45
			30375
			24300
			273375
			0,000000091125

folglich ist:

$$f(2{,}0945) = \begin{array}{r} 0{,}04996935 \\ 0{,}0001269675 \\ 0{,}000000091125 \\ \hline 0{,}050096408625 \\ -\,0{,}050671 \\ \hline =-\,0{,}000574591375 \end{array}, \qquad f'(2{,}0945) = \begin{array}{r} 11{,}1043 \\ 0{,}056430 \\ 0{,}00006075 \\ \hline 11{,}16079075 \end{array}$$

$$f''(2{,}0945) = \begin{array}{r} 12{,}54 \\ 0{,}0270 \\ \hline 12{,}5670 \end{array}, \qquad f'''(2{,}0945) = 6$$

Da das Resultat dieser Substitution für $f(x)$ einen negativen Werth gibt, so folgt, daß die Zahl 2,0945 kleiner ist als die Wurzel, welche also zwischen den Grenzen 2,0945 und 2,0946 enthalten ist. Die letzte dieser beiden Zahlen ist die sogenannte äußere Grenze, und zur Fortsetzung der Operation muß man diese Zahl in die ge-

gebenen Functionen substituiren; aber es ist nicht nöthig, die bereits verrichteten Rechnungen zu wiederholen, indem man die Formel:

$$f(\beta+i)=f(\beta)+if'(\beta)+\frac{i^2}{2}f''(\beta)+\frac{i^3}{2.3}f'''(\beta)+\text{etc.}$$

anwendet.

Es ergibt sich also unmittelbar aus den vorhergehenden Resultaten:

$$f(2{,}0946) = 0{,}001116079075\,,\quad f'(2{,}0946) = 11{,}16079075$$

$$\begin{array}{r} 0{,}001116079075 \\ 62835 \\ 1 \\ \hline 0{,}001116141911 \\ -\,0{,}000574591375 \\ \hline =0{,}000541550536 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11{,}16079075 \\ 125670 \\ 3 \\ \hline =11{,}16204748 \end{array}$$

$$f''(2{,}0946) = 12{,}5670\,,\quad f'''(2{,}0946) = 6$$

$$\begin{array}{r} 12{,}5670 \\ 6 \\ \hline 12{,}5676 \end{array}$$

Da nun $n=4$ ist, so muß der Quotient $\dfrac{f(\beta)}{f'(\beta)}=\dfrac{0{,}000541550536}{11{,}16204748}$ bis zur achten Decimalstelle incl. entwickelt werden. Da der Werth dieses Quotienten $=0{,}00004851$ ist, so subtrahirt man die Zahl 0,00004852 von der Grenze 2,0946, welches für den dritten genäherten Werth der Wurzel 2,09455148 gibt.

Die Substitution dieses Werthes in die gegebenen Functionen erhellet aus folgender Uebersicht:

$$f(2{,}0945) = -\,0{,}000574591375\,,\quad f'(2{,}0945) = 11{,}16079075$$

$$\begin{array}{r} 11{,}16079075 \\ 0{,}00005148 \\ \hline 8928632600 \\ 4464316300 \\ 1116079075 \\ 5580395375 \\ \hline 0{,}0005745575078100 \end{array}$$

$$f''(2{,}0945) = 12{,}5670$$

$$\begin{array}{r} 12{,}5670 \\ 0{,}00005148 \\ \hline 1005360 \\ 502680 \\ 125670 \\ 628350 \\ \hline 0{,}000646949160 \\ 5148 \\ \hline 5175593280 \\ 2587796640 \\ 646949160 \\ 3234745800 \\ \hline 3330494275680 \\ 0{,}000000001665247137840 \end{array}$$

$$f'''(2{,}0945) = 6$$

$$\begin{array}{r}
0{,}00005148 \\ \hline
48 \\
24 \\
6 \\
30 \\ \hline
0{,}00030888 \\
5148 \\ \hline
247104 \\
123552 \\
30888 \\
154440 \\ \hline
159011424 \\
0{,}0000000079505712 \\
5148 \\ \hline
636045696 \\
318022848 \\
79505712 \\
397528560 \\ \hline
409295405376 \\
0{,}0000000000001364318017 92
\end{array}$$

und hieraus folgt:

$$\begin{array}{rl}
f(2{,}09455148) = & 0{,}0005745575078100 \\
& \phantom{0{,}0000}16652471378 40 \\
& \phantom{0{,}00000000}136431801792 \\ \hline
& 0{,}000574574160417810201792 \\
& -\,0{,}000574591375 \\ \hline
= & -\,0{,}000000017214582189798208
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
f'(2{,}09455148) = & 11{,}16079075 \\
& \phantom{11{,}1}646949160 \\
& \phantom{11{,}16}79505712 \\ \hline
= & 11{,}1614377071105712
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
f''(2{,}09455148) = & 12{,}5670 \\
& \phantom{12{,}5}30888 \\ \hline
& 12{,}56730888
\end{array}$$

$$f'''(2{,}09455148) = 6$$

Da das Resultat der Substitution für $f(x)$ einen negativen Werth gibt, so folgt, daß die substituirte Zahl kleiner ist als die Wurzel, welche folglich zwischen den Grenzen **2,09455148** und **2,09455149** liegt. Die Resultate der Substitution dieser letzten Zahl, welche zur weitern Fortsetzung der Approximation erforderlich sind, lassen sich fast ohne alle Rechnung aus den bereits erhaltenen durch

das angewandte Verfahren ableiten. Es findet sich:

$$
\begin{array}{rr}
f(2{,}09455149) = & 0{,}0000001116143770711 05712 \\
& 628365444 \\
& 1 \\
\hline
& 0{,}0000001116143776 99471157 \\
& -\,0{,}0000000172145821 89798208 \\
\hline
& =0{,}0000000943997955 09672949
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr}
f'(2{,}09455149) = & 11{,}1614377071105712 \\
& 1256730888 \\
& 3 \\
\hline
& =11{,}1614378327836603
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr}
f''(2{,}09455149) = & 12{,}56730888 \\
& 6 \\
\hline
& 12{,}56730894
\end{array}
$$

$f'''(2{,}09455149) = 6.$

Da die Zahl n jetzt $=8$ ist, so muß die durch $\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ angezeigte Division bis zur sechszehnten Decimalstelle incl. entwickelt werden, und da der Quotient dieser Division vermittelst der Regel der geordneten Division $= 0{,}0000000084576734$ gefunden wird; so subtrahire man diese Zahl, nachdem man ihre letzte Ziffer um eine Einheit vermehrt hat, von dem vorhergehenden Näherungswerthe der Wurzel, welches für den vierten Näherungswerth 2,0945514815423265 gibt, eine Zahl, welche von der Wurzel nicht um eine Decimaleinheit der sechszehnten Ordnung verschieden ist.

In dem gewählten Beispiele gibt jede Operation immer doppelt so viele genaue Decimalstellen, als schon bekannt waren; folglich wird die folgende Operation den Werth der Wurzel bis auf die zwei und dreißigste Decimalstelle genau geben. Die Substitution des vorhergehenden Werthes gibt leicht folgende Resultate:

$f(x) = -0{,}0000000000000000102107496044367984543249518586 5375$

$f'(x) = 11{,}1614377264934647264456330978067 5$

$f''(x) = 12{,}5673088892539500.$

Weil der für $f(x)$ gefundene Werth negativ ist, so ist die substituirte Zahl kleiner als die Wurzel.

Diese Zahl bildet folglich die untere Grenze, und die obere Grenze ist mithin $= 2{,}0945514815423266$. Die Resultate der Substitution dieser letzten Zahl ergeben sich unmittelbar aus den vorhergehenden und sind folgende:

$f(x) = 0{,}0000000000000000005068812205666900486125701856 06$

$f'(x) = 11{,}161437726493465983176522023 20268$

$f''(x) = 12{,}5673088892539596.$

Man dividire also $f(x)$ durch $f'(x)$, indem man den Quotienten bis zur zweiunddreißigsten Decimalstelle incl. entwickelt, welches 0,00000000000000000851761345942069 gibt. Addirt man zur letzten Ziffer dieser Zahl eine Einheit und subtrahirt diese Zahl von dem vorhergehenden Werthe, so erhält man für den fünften Näherungswerth der Wurzel 2,09455148154232659148238654057930.

Die letzte Ziffer dieses Werthes ist genau, d. h. man würde sich von dem wahren Werthe der Wurzel entfernen, wenn man diese Ziffer um eine Einheit vermehrte oder verminderte. Wollte man aber die Division weiter entwickeln, so würden die auf die zwei und dreißigste Decimalstelle folgenden Decimalziffern der Wurzel nicht mehr angehören.

§ 31. Wir haben in § 6 ff. die Eigenschaften der Approximation des ersten Grades, d. h. der, welche aus der Vernachlässigung der Glieder mit den höhern Potenzen der Unbekannten als die erste entspringt, angegeben. Mehrere Analysten haben auch die Approximation des zweiten Grades betrachtet, welche weit schneller convergirt, und sie zur Berechnung der Wurzeln in Vorschlag gebracht. Dieses Verfahren kann in der That in sehr vielen Fällen mit Vortheil angewandt werden, aber es bleiben dieselben Schwierigkeiten zu beseitigen, welche die newtonsche Approximation darbot. Sie bestehen in einer zuverlässigen Unterscheidung der imaginären Wurzeln, einer regelmäßigen Anordnung des Calculs durch Bestimmung einer zweiten Grenze, und in der Bestimmung des Maaßes der Convergenz der Approximation. Wir wollen in den folgenden §§ die Prinzipien aus einandersetzen, durch welche diese Aufgaben gelöst werden.

Um jede Ungewißheit, welche aus der Vernachlässigung der subordinirten Glieder entspringen könnte, zu vermeiden, haben wir den Ausdruck zweier Grenzen in die Rechnung eingeführt, zwischen welchen die Wurzel immer liegt. Von diesem nämlichen Prinzipe werden wir wieder Gebrauch machen, ohne die bei der linearen Approximation gegebenen Rechnungen zu wiederholen; denn nachdem wir die strenge Richtigkeit dieser Schlüsse nachgewiesen haben, ist es sehr wichtig, die höchste Einfachheit der Differenzialanalysis zu conserviren. Wir wollen zuerst in dieser Beziehung folgende Aufgabe, welche sich auf die Approximation des ersten Grades bezieht, betrachten.

Der Bogen m x n (Fig. 12) gehört zu einer Linie, deren Ordinate $f(x)$ ist; der Punkt o ist der Anfangspunkt der Abscissen; die Abscisse o x des Durchschnittspunktes ist der Werth einer Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$. Von dem Durchschnittspunkte x aus sei zur Linken auf der Axe der Abscissen eine sehr kleine Größe x a genommen, welche wir mit ω bezeichnen wollen. Im Punkte a sei die Ordinate a m errichtet; durch den Punkt m ziehe man zwei gerade Linien m μ und m ν, wovon die erste m μ den Bogen im Punkte m berührt und die zweite m ν zu der Geraden t x t', welche den Bogen im Punkte x berührt, parallel ist. Auf diese Weise wird auf der Axe der Abscissen ein Intervall $\mu\nu$ gebildet, welches weit kleiner sein würde, wenn das erste Intervall x a einen viel kleinern Werth bekommen hätte. Es kommt darauf an, die zwischen dem ersten

Intervalle xa, welches als willkührlich betrachtet werden kann, und dem Intervalle $\mu\nu$, welches nach der vorhergehenden Construction davon abhängig ist, stattfindende Relation zu bestimmen. Man betrachtet hier das letzte Verhältniß, welches zwischen den Intervallen xa und $\mu\nu$ statt findet, d. h. man nimmt an, das mit ω bezeichnete Intervall ax werde immer kleiner und habe Null zur Grenze, so daß es z. B. successive $= \omega$, $\frac{1}{2}\omega$, $\frac{1}{4}\omega$, u. s. w. werde, und man soll die correspondirenden Werthe von $\mu\nu$ bestimmen, und daraus das Verhältniß zwischen $\mu\nu$ und ax ableiten, wenn $\mu\nu$ seine Grenze Null erreicht.

Die Aufgabe läßt sich, nachdem sie so genau bestimmt ist, sehr leicht lösen. Wenn x den Werth der Abscisse ox und ω das Intervall xa bezeichnet, so ist die Ordinate am offenbar gleich $f(x-\omega)$. Die Subtangente $a\mu$ wird also durch $-\frac{f(x-\omega)}{f'(x-\omega)}$ ausgedrückt und der Werth der Linie $a\nu$ ist gleich $-\frac{f(x-\omega)}{f'(x)}$. Folglich ist die Länge $\mu\nu$ gleich:

$$-\frac{f(x-\omega)}{f'(x)}+\frac{f(x-\omega)}{f'(x-\omega)}, \text{ oder gleich } f(x-\omega).\left(\frac{1}{f'(x-\omega)}-\frac{1}{f'(x)}\right).$$

Es ist nun bloß noch übrig, die Größe ω unendlich klein anzunehmen. Alsdann ist $f(x-\omega)=f(x)-dx f'(x)$, weil aber x die Abscisse eines Durchschnittspunktes der Axe mit der Curve ist, so ist $f(x)=0$, und folglich ist der erste Factor $f(x-\omega)$ des Ausdruckes von $\mu\nu$ gleich $-dx f'(x)$. Der zweite Factor ist das Differenzial von $\frac{1}{f'(x)}$, wenn dx negativ gesetzt wird; er ist also $= dx\frac{f''(x)}{(f'(x))^2}$. Folglich ist der Werth von $\mu\nu$:

$$-\omega^2\frac{f''(x)}{f'(x)}.$$

Dasselbe Resultat findet man offenbar, wenn man den vorhergehenden Ausdruck nach den Potenzen von ω entwickelt und die subordinirten Glieder vernachlässigt.

Aus diesem Werthe der unendlich kleinen Linie $\mu\nu$ erhellet, daß das Intervall $\mu\nu$ unvergleichbar kleiner ist als das Intervall ω. Es ist gleich dem Quadrate von ω, multiplicirt mit der endlichen Größe $-\frac{f''(x)}{f'(x)}$, welche das Verhältniß der beiden abgeleiteten Functionen $f''(x)$ und $-f'(x)$ für den Durchschnittspunkt x ausdrückt und von der Form der Curve in diesem Punkte abhängt.

§ 32. Wir wollen ω als einen ersten Fehler betrachten, weil diese Größe die Differenz zwischen dem genäherten Werthe oa und dem genauen Werthe ox ausdrückt. Zieht man die Tangente $m\mu$, so wird ein, dem Punkte x näher liegender Punkt μ bestimmt, und

wenn man, um einen neuen Werth $o\omega$ der Abscisse zu bilden, zu der Abscisse oa die Subtangente $a\mu$ addirt; so ist klar, daß der noch statt findende Fehler μx weit kleiner geworden ist, als der vorhergehende ax. Dieser neue Fehler sei $=\omega'$, so folgt aus dem Ausdrucke $-\frac{f(x-\omega)}{f'(x-\omega)}$ der Subtangente:

$$\omega'=\omega+\frac{f(x-\omega)}{f'(x-\omega)}.$$

Entwickelt man nach den Potenzen von ω und vernachlässigt die subordinirten Glieder, so hat man:

$$\omega'=\omega+\frac{f(x)-\omega.f'(x)+\frac{1}{2}\omega^2.f''(x)+\text{etc.}}{f'(x)-\omega.f''(x)+\text{etc.}};$$

oder weil $f(x)$ nach der Voraussetzung Null ist:

$$\omega'=\omega+\frac{-\omega.f'(x)+\frac{1}{2}\omega^2.f''(x)+\text{etc.}}{f'(x)-\omega.f''(x)+\text{etc.}}.$$

und weil ω eine unendlich kleine Größe ist:

$$\omega'=-\frac{\omega^2}{2}.\frac{f''(x)}{f'(x)}.$$

Also nimmt der zuvörderst sehr klein angenommene Fehler ω schnell ab, weil er dem Producte aus dem Quadrate des vorhergehenden Fehlers und der endlichen Größe $-\frac{1}{2}.\frac{f''(x)}{f'(x)}$, welche sich auf den Punkt x des Bogens mxn bezieht, gleich wird.

Die Gleichung $\omega'=-\frac{\omega^2}{2}.\frac{f''(x)}{f'(x)}$ drückt, wie schon gesagt, die Endrelation eines Fehlers zu dem folgenden aus. Diese Relation findet für den Durchschnittspunkt x in aller Strenge statt, d. h. sie drückt die Endconvergenz der linearen Approximation aus. Diese Resultate waren bereits gefunden und wir wollen nun dieselben Betrachtungen auf die Berührungen parabolischer Bogen anwenden.

§ 33. Es sei oa (Fig. 13) ein erster genäherter Werth der Abscisse ox eines Durchschnittspunktes x der Curve mit der Axe. Der Bogen mxn gehört einer Curve an, deren Ordinate durch $f(x)$ ausgedrückt wird. Durch a wollen wir den genäherten Werth oa und durch x den genauen Werth ox bezeichnen. Es sei $x=a+\varepsilon$, so daß ε der Fehler der ersten Approximation und $f(a+\varepsilon)=0$ ist. Entwickelt man $f(a+\varepsilon)$ nach den Potenzen von ε und läßt die Glieder, worin höhere Potenzen von ε als die zweite vorkommen, hinweg; so erhält man zur Bestimmung von ε die Gleichung:

$$f(a)+\varepsilon f'(a)+\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 f''(a)=0,$$

wo $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$ bekannte Coefficienten sind. Wenn man

die Gleichung:

$$\varepsilon^2 + 2\varepsilon \frac{f'(a)}{f''(a)} + 2\frac{f(a)}{f''(a)} = 0$$

auflöſt, ſo findet man:

$$\varepsilon = -\frac{f'(a)}{f''(a)} \pm \left[\left(\frac{f'(a)}{f''(a)}\right)^2 - 2\frac{f(a)}{f''(a)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Es ſei ω der Fehler des erſten genäherten Werthes a der Wurzel und ω' der Fehler des mehr genäherten Werthes, welchen man erhält, wenn man zu der Größe a die ſchon beſtimmte Wurzel ε addirt; ſo iſt $x = a + \omega$ und $x = a + \varepsilon + \omega'$. Alſo $\omega' = \omega - \varepsilon$.

Die Aufgabe beſteht nun darin, die Endrelation zwiſchen ω und ω' zu beſtimmen, welches auf folgende Weiſe geſchehen kann. Man beſtimme ε vermittelſt der vorhergehenden Gleichung, indem man für a ſeinen Werth $x - \omega$ ſetzt und dann ω unendlich klein annimmt. Folglich iſt:

$$\omega' = \frac{\omega f''(x-\omega) + f'(x-\omega) \mp [(f'(x-\omega))^2 - 2f(x-\omega).f''(x-\omega)]^{\frac{1}{2}}}{f''(x-\omega)}$$

Da ω eine unendlich kleine Größe iſt, ſo behält man nur das erſte vorhandene Glied des entwickelten Reſultates bei. Nun iſt aber leicht einzuſehen, daß, wenn man der Wurzelgröße das Zeichen — gibt, im Zähler alle Glieder mit den niedrigern Potenzen von ω als die dritte verſchwinden. Was den Nenner $f''(x-\omega)$ anlangt, ſo reducirt er ſich, wenn ω unendlich klein iſt, auf $f''(x)$. Es iſt folglich nur der Zähler zu bilden, welches auf folgende Weiſe geſchieht.

Wenn man den erſten Theil $\omega f''(x-\omega) + f'(x-\omega)$ nach den Potenzen von ω entwickelt, bei der dritten Potenz ſtehen bleibt und die Veränderliche x nicht unter das Functionszeichen ſetzt; ſo findet man:

$$f' - \frac{\omega^2}{2} f''' + \frac{\omega^3}{3} f^{IV}.$$

In dem unter dem Wurzelzeichen vorkommenden Producte $f(x-\omega).f''(x-\omega)$ reducirt ſich der Factor $f(x-\omega)$ auf $-\omega f' + \frac{\omega^2}{2} f'' - \frac{\omega^3}{2.3} f'''$, weil $f(x)$ nach der Vorausſetzung Null iſt. Will man alſo in der Entwickelung dieſes Productes bei ω^3 ſtehen bleiben, ſo ſetzt man für den zweiten Factor $f''(x-\omega)$ die Größe $f'' - \omega f''' + \frac{\omega^2}{2} f^{IV}$. Das geſuchte Product iſt folglich:

$$f(x-\omega).f''(x-\omega) =$$

$$-\omega f' f'' + \omega^2 \left(\frac{1}{2} f''^2 + f' f'''\right) - \omega^3 \left(\frac{2}{3} f'' f''' + \frac{1}{2} f' f^{IV}\right).$$

Das Quadrät von $f'(x-\omega)$ oder von $f'-\omega f''+\frac{\omega^2}{2}f'''-\frac{\omega^3}{2.3}f^{IV}$ ist:

$$f'^2-2\omega f'f''+\omega^2(f''^2+f'f''')-\omega^3\left(f''f'''+\frac{1}{3}f'f^{IV}\right).$$

Folglich ist die Größe unter dem Exponenten $\frac{1}{2}$:

$$f'^2-\omega^2 f'f'''+\omega^3\left(\frac{1}{3}f''f'''+\frac{2}{3}f'f^{IV}\right).$$

Erhebt man zur Potenz $\frac{1}{2}$, so findet man, wenn man der Wurzelgröße das Zeichen — gibt:

$$-f'\left[1-\omega^2.\frac{1}{2}\frac{f'''}{f'}+\omega^3\left(\frac{1}{2.3}\frac{f''f'''}{f'^2}+\frac{1}{3}\frac{f^{IV}}{f'}\right)\right],$$

oder:

$$-f'+\omega^2.\frac{1}{2}f'''-\omega^3\left(\frac{1}{2.3}\frac{f''f'''}{f'}+\frac{1}{3}f^{IV}\right),$$

und wenn man hierzu den ersten Theil des Ausdruckes von ω' addirt; so erhält man für das Maaß der Endconvergenz der Approximation des zweiten Grades das sehr einfache Resultat:

$$\omega'=\frac{1}{f''}\left(-\frac{\omega^3}{2.3}\frac{f''f''}{f'}\right),\ \text{oder}\ \omega'=-\frac{\omega^3}{2.3}\frac{f'''}{f'}.$$

Der Fehler ω' nimmt sehr schnell ab, und sein Werth ist das Product aus dem Cubus des vorhergehenden Fehlers und einem constanten Coefficienten. Die Zahl der genauen Decimalziffern ist, allgemein zu reden, für jede neue Operation dreimal so groß, als für die vorhergehende. Der constante Coefficient ist $=-\frac{1}{2.3}\frac{f'''(x)}{f'(x)}$ und der Werth desselben hängt von der Form der Curve in dem Durchschnittspunkte ab.

§ 34. Diese Folgerungen erstrecken sich auf die Approximationen aller Grade, und um das allgemeine Resultat zu erhalten, kann man sich des newtonschen Parallelogrammes bedienen; denn das zur Bestimmung der Convergenz der Approximation des zweiten Grades angewandte Verfahren ist bei Gleichungen von höhern Graden nicht mehr anwendbar, weil sich solche Gleichungen nicht durch ähnliche Formeln, wie die für den zweiten und dritten Grad, lösen lassen. Für das Maaß der Convergenz der Approximation des dritten Grades findet man z. B.:

$$\omega'=-\frac{\omega^4}{2.3.4}.\frac{f^{IV}}{f'},$$

und allgemein für das Maaß der Convergenz der Approximation des n ten Grades:

$$\omega' = -\frac{\omega^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}\cdot\frac{f^{(n+1)}}{f'}.$$

Uebrigens lassen die für die Approximation des ersten Grades gegebenen Regeln hinsichtlich der Leichtigkeit der numerischen Berechnung der Wurzeln nichts zu wünschen übrig, und die vorhergehenden Bemerkungen über die Approximationen höherer Grade sollten bloß zeigen, von welcher Ausdehnung diese Theorie der Approximation überhaupt ist.

§. 35. Die Beseitigung der Schwierigkeiten, welche sich bei der Unterscheidung des Falles zweier imaginärer Wurzeln von dem Falle zweier reeller Wurzeln darbietet, muß als der wichtigste Punkt der Auflösung der Gleichungen angesehen werden. Hierzu ist ein eigenthümliches, auf die Berechnung der Grenzen, zwischen welchen die Wurzeln liegen, gegründetes Verfahren erforderlich. Die Untersuchungen von Rolle und De Gua konnten nicht zur Auflösung der Zahlengleichungen führen, weil es ihnen an einem besondern Merkmale zur Unterscheidung der imaginären Wurzeln fehlte. Durch die Berechnung der Gleichung mit den Quadraten der Differenzen der Wurzeln ist diese Schwierigkeit zum ersten Male gehoben. Da aber, wie man längst eingesehen hat, diese Auflösung bloß eine theoretische ist und da alle, zu ihrer Vervollkommnung gemachten Versuche fast ganz fruchtlos geblieben sind; so war es nöthig, die Aufgabe auf eine andere Art zu behandeln, und wir haben gezeigt, daß sie eine andere, nicht weniger genaue und einer ungleich leichtern Anwendung fähige Auflösung gestattet. Aber es ist von Wichtigkeit, die in Rede stehende Fundamentalaufgabe aus verschiedenen Gesichtspunkten zu betrachten, weil sie sich bei Untersuchungen über krumme Oberflächen und in der allgemeinen Theorie der Gleichungen wieder darbietet. In den folgenden Paragraphen wollen wir daher die allgemeinen Prinzipien angeben, vermittelst welcher sie auf verschiedene Arten gelöst werden kann.

Es seien $F(x)$ und $f(x)$ zwei algebraische Functionen, deren Coefficienten gegebene Zahlen sind. Gesetzt, man hätte durch Anwendung der im Vorhergehenden auseinander gesetzten Methoden zwei Grenzen a und b gefunden, zwischen welchen die Gleichung $F(x)=0$ eine reelle Wurzel α hat; man soll das Zeichen des Resultates bestimmen, welches man erhielte, wenn man diese Wurzel α in die andere Function $f(x)$ substituirte.

Wenn der genaue Werth von α bekannt wäre, so hätte die Aufgabe weiter keine Schwierigkeit; denn wenn man der, in der Function $f(x)$ vorkommenden Veränderlichen x diesen genauen Werth α beilegte, so ergäbe sich das Zeichen des Resultates. Die Sache verhält sich jedoch nicht so, wenn die Wurzel α nur näherungsweise bekannt ist; denn wenn man statt α eine sehr nahe liegende Grenze a substituirt, so weiß man nicht gewiß, ob das Zeichen von $f(a)$ dasselbe ist, als das von $f(\alpha)$, und diese Ungewißheit findet immer statt, wie klein die Differenz zwischen der Wurzel α und der Grenze

a auch sein mag. Bei der Unterscheidung des Falles zweier imaginärer Wurzeln von dem Falle zweier reeller Wurzeln kommt es aber eben darauf an, das Zeichen zu bestimmen, welches man erhielte, wenn man in eine gewisse Function $f(x)$ eine Größe α substituirte, die eine andere Function $F(x)$ zu Null macht.

Denn betrachtet man z. B. die in §§ 12 und 36 des ersten Abschnittes behandelte Gleichung:

$$x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101 = 0,$$

so findet man, wenn man in die Reihe der Functionen:

$$f^{v}(x),\ f^{iv}(x),\ f'''(x),\ f''(x),\ f'(x),\ f(x)$$

die Zahlen 2 und 3 substituirt, die beiden Reihen:

(2)	+	+	—	—	+	—
	120	168	48	82	30	21
	0	0	1	0	1	2
(3)	+	+	+	—	—	—
	120	288	180	26	43	32

Die nach der Regel in § 31 des ersten Abschnittes gebildete Reihe der Indices schließt sich mit 0 1 2. Folglich hat die Gleichung $f'(x) = 0$ zwischen den Grenzen 2 und 3 eine einzige reelle Wurzel und die Gleichung $f(x) = 0$ hat zwischen diesen Grenzen zwei Wurzeln, aber man weiß noch nicht, ob diese beiden Wurzeln reell, oder ob sie imaginär sind. Um die Natur dieser Wurzeln zu bestimmen, müßte man den genauen Werth der Wurzel α der Gleichung $f'(x)=0$ in $f(x)$ substituiren und das Zeichen von $f(\alpha)$ bemerken. Wenn dieses Zeichen positiv ist, so sind die beiden Wurzeln reell; die eine liegt zwischen 2 und α und die andere zwischen α und 3, wie aus den, im ersten Abschnitte aufgestellten Prinzipien folgt. Wenn dagegen dieses Zeichen negativ ist, so sind die beiden Wurzeln zuverlässig imaginär, weil die Zeichenreihe zugleich zwei Zeichenwechsel verliert, wenn die substituirte Zahl von einem, unendlich wenig kleinern Werthe als α zu einem, unendlich wenig größern Werthe als α übergeht. Um aber diesen letzten Schluß mit Zuverlässigkeit machen zu können, ist es nicht hinreichend, in $f(x)$ für x einen sehr genäherten Werth von α zu substituiren; denn es ist leicht einzusehen, daß der Werth von $f(x)$ positiv sein könnte, wenn man der Größe x einen gewissen Werth beilegt und daß $f(x)$ negativ werden könnte, wenn man die substituirte Zahl um eine sehr kleine Größe änderte. Die ganze Schwierigkeit besteht also darin, das Zeichen von $f(x)$ zu bestimmen, obgleich man für x einen genäherten, kleinern Werth a als α, oder einen genäherten größern Werth b als α substituirt. Wir haben diese Aufgabe gelöst, indem wir nicht bloß die Größe der Resultate $f(a)$ und $f(b)$, sondern auch die Werthe $f'(a)$, $f'(b)$ der abgeleiteten Function der ersten Ordnung betrachteten. In der That, wenn der Werth von a dem Werthe von α sehr nahe kommt

und wenn das Resultat $f(a)$ einen sehr großen positiven Werth hat, so kann man so zu sagen sicher sein, daß das Zeichen von $f(\alpha)$ positiv ist, und dessen ungeachtet bleibt noch zu untersuchen, ob die abgeleitete Function $f'(a)$ einen sehr großen negativen Werth hat; denn da in diesem Falle die Function $f(a)$ sehr schnell abnimmt, so wäre es möglich, daß sie negativ würde, wenn man den Werth von x sehr wenig ändert, und daß sie darauf positiv würde, weil die abgeleitete Function $f'(x)$ selbst einen großen positiven Werth hat. Die Auflösung, welche wir in § 24 ff. des ersten Abschnittes gegeben haben, besteht darin, die Werthe von $f(a)$, $f'(a)$, $f(b)$, $f'(b)$ und $b-a$ in den Calcul einzuführen. Durch die Vergleichung dieser Größen läßt sich das Zeichen von $f(\alpha)$ mit völliger Zuverlässigkeit bestimmen. Man kann diese Aufgabe aber auch aus folgendem bemerkenswerthen andern Gesichtspunkte betrachten.

§ 36. Wenn man im Allgemeinen das Zeichen bestimmen will, welches man erhielte, wenn man in $f(x)$ die Wurzel α der Gleichung:

$$F(x)=0$$

substituirte, wo $f(x)$ und $F(x)$ zwei gegebene algebraische Functionen sind, und wenn der besondere Fall ausgenommen wird, wo $F(x)=f'(x)$ ist; so braucht man nur die im ersten Abschnitte in Beziehung auf die Grenzen der Wurzeln bewiesenen Sätze anzuwenden.

Man bestimme zwei Grenzen a und b, zwischen welchen die Gleichung $F(x)=0$ eine reelle Wurzel α hat; so können diese Grenzen immer hinreichend zusammengezogen werden, damit aus den beiden Zeichenreihen der Resultate:

$$\begin{matrix} F^{(m)}(a), & F^{(m-1)}(a) \ldots\ldots F'''(a), & F''(a), & F'(a), & F(a) \\ F^{(m)}(b), & F^{(m-1)}(b) \ldots\ldots F'''(b), & F''(b), & F'(b), & F(b) \end{matrix} \qquad (1)$$

erhelle, daß die Gleichung $F(x)=0$ zwichen den Grenzen a und b in der That eine reelle Wurzel hat. Gesetzt, diese Bedingung finde statt, so substituire man dieselben Grenzen a und b in die Functionen:

$$f^{(n)}(x),\ f^{(n-1)}(x) \ldots\ldots f'''(x),\ f''(x),\ f'(x),\ f(x)$$

und untersuche, ob sich aus der Vergleichung der beiden Zeichenreihen von:

$$\begin{matrix} f^{(n)}(a), & f^{(n-1)}(a) \ldots\ldots f'''(a), & f''(a), & f'(a), & f(a) \\ f^{(n)}(b), & f^{(n-1)}(b) \ldots\ldots f'''(b), & f''(b), & f'(b), & f(b) \end{matrix} \qquad (2)$$

ergibt, daß die Gleichung $f(x)=0$ zwischen a und b keine Wurzel haben kann, so daß das letzte Glied der den Reihen (2) entsprechenden Reihe der Indices 0 ist. Wenn diese und die vorhergehende Bedingung zu gleicher Zeit statt finden, so ist das Zeichen von $f(\alpha)$ zuverlässig dasselbe, als das gemeinschaftliche Zeichen von $f(a)$ und $f(b)$. Denn aus der zweiten Bedingung folgt, daß alle, zwischen a und b liegende Größen Resultate von demselben Zeichen geben,

wenn man sie in $f(x)$ substituirt, und aus der ersten Bedingung folgt, daß α zwischen a und b liegt. Um also dieses Zeichen zu bestimmen, braucht man nur die Grenzen a und b so zusammen zu ziehen, daß die Wurzel α stets zwischen a und b liegt, welches sich aus den Zeichen der Reihen (1) ergibt, und daß die Vergleichung der Reihen (2) für das letzte Glied der Reihe der Indices 0 gibt. Abstrahirt man von dem besondern Falle, wo zwischen diesen Functionen die Relation $F(x) = f'(x)$ statt findet, so lassen sich leicht zwei Grenzen a und b finden, welche beiden Bedingungen Genüge leisten. Denn da die Function $F(x)$ durch die Ordinate einer gewissen Curve ausgedrückt wird, und da die Function $f(x)$ ebenfalls die Ordinate einer zweiten Curve ausdrückt; so entsprechen den beiden Grenzen a und b, zwischen welchen ein Durchschnittspunkt der ersten Curve mit der Abscissenaxe liegt, im Allgemeinen zwei Ordinaten der zweiten Curve, zwischen welchen der Bogen derselben keinen Durchschnittspunkt und keine Biegung hat. Folglich gibt die Vergleichung der Reihen (2) zum letzten Gliede der Reihe der Indices 0. Also finden die beiden ausgesprochenen Bedingungen zu gleicher Zeit statt, und das Zeichen von $f(\alpha)$ ist bekannt.

§ 37. Diese Bemerkung beschränkt sich nicht bloß auf Functionen mit einer veränderlichen Größe, man kann vielmehr die Aufgabe, welche sich bei den wichtigsten Anwendungen der algebraischen Analysis darbietet, unter folgendem allgemeinern Gesichtspunkte auffassen. Wenn eine algebraische Function $f(x, y, z\ldots)$ mit mehreren veränderlichen Größen gegeben ist und die Werthe von $x, y, z\ldots$ bloß näherungsweise bekannt sind, das Zeichen zu bestimmen, welches $f(x, y, z\ldots)$ bekommt, wenn man in diese Function die genauen Werthe von $x, y, z\ldots$ substituirt. Für jeden dieser Werthe müssen zwei Grenzen bekannt sein, zwischen welchen derselbe liegt, und man muß nach einem gewissen Merkmale beurtheilen können, ob diese Grenzen einander nahe genug liegen, damit die verschiedenen Resultate, welche man erhält, wenn man in die Function $f(x, y, z\ldots)$ beliebige, zwischen diesen Grenzen liegende Werthe von $x, y, z\ldots.$ substituirt, alle dasselbe Zeichen haben.

Für den Fall einer Veränderlichen haben wir dieses Merkmal in § 36 angegeben. Dieser Satz ist allgemein und es ist immer leicht, die beiden Grenzen, zwischen welchen jeder der Werthe von $x, y, z\ldots.$ liegt, so zusammen zu ziehen, daß sich das Zeichen des Resultates der Substitution nicht ändert, wenn man der Veränderlichen beliebige, zwischen diesen Grenzen liegende Werthe beilegt.

§ 38. Dieser Satz entspricht, allgemein zu reden, den verschiedenen Punkten krummer Linien oder Oberflächen und beliebigen Werthen der Veränderlichen $x, y, z\ldots$; aber es gibt besondere Fälle, auf welche er sich nicht unmittelbar anwenden läßt. Diese Fälle erfordern ein besonderes Verfahren, wovon wir die Grundzüge angeben wollen. Man soll z. B. das Zeichen des Resultates bestimmen, welches man erhielte, wenn man in die algebraische Function $f(x)$ für x den Werth α, welcher die abgeleitete Function $f'(x)$ zu Null macht, substituirte. Dieser Werth α ist nicht genau bekannt, sondern man weiß bloß, daß er zwischen zwei sehr engen, gegebenen

Grenzen a und b liegt. Die Aufgabe ist genau dieselbe, als die vorhin betrachtete, wo es auf die Unterscheidung des Falles zweier reeller Wurzeln von dem Falle zweier imaginärer Wurzeln ankam, wie aus dem in § 35 angeführten Beispiele erhellet. Wenn die zweite Function $f'(x)$ nicht die abgeleitete Function von der ersten $f(x)$ wäre, und man statt $f(x)$ eine davon verschiedene und unabhängige Function $F(x)$ hätte, so untersuchte man, ob die beiden Grenzen a und b, zwischen welchen α liegt, einander nahe genug liegen, daß die Vergleichung der Zeichenreihen von:

$$f^{(n)}(a),\ f^{(n-1)}(a) \ldots . f'''(a),\ f''(a),\ f'(a),\ f(a),$$

$$f^{(n)}(b),\ f^{(n-1)}(b) \ldots . f'''(b),\ f''(b),\ f'(b),\ f(b),$$

zum letzten Gliede der Reihe der Indices 0 gibt, und wenn diese Bedingung anfangs nicht statt findet; so zieht man die Grenzen a und b so lange zusammen, bis dieses der Fall ist, welches im Allgemeinen sehr leicht ist. Alsdann wäre das gesuchte Zeichen von $f(\alpha)$ das gemeinschaftliche Zeichen von $f(a)$ und $f(b)$. Aber in dem besondern Falle, welchen wir betrachten, läßt sich die letzte Bedingung nicht erhalten, wie nahe die Grenzen a und b einander auch liegen mögen, und das letzte Glied der Reihe der Indices würde niemals 0 sein. Wenn die in dem Intervalle von a bis b gesuchten beiden Wurzeln reell wären, so würden sie sich durch Zusammenziehung der Grenzen trennen lassen; aber wenn sie imaginär wären, so würde immer eine Ungewißheit statt finden, weil das letzte Glied der Reihe der Indices niemals 0, sondern immer 2 wäre. Dieses kommt daher, daß der Werth von x, welcher die Ordinate $f'(x)$ der zweiten Curve zu Null macht, in der ersten Curve einem Punkte entspricht, wo die Tangente zur Axe der Abscissen parallel ist. Nun kann aber das letzte Glied der Reihe der Indices nur in dem Falle Null sein, wo der, dem Intervalle der Grenzen entsprechende Curvenbogen keinen Punkt hat, für welchen die Ordinate ein Maximum oder Minimum ist. Hieraus erhellet also, daß der in § 36 ausgesprochene Satz sich hier nicht auf dieselbe Weise anwenden läßt, als wenn die beiden gegebenen Functionen in keiner besondern Beziehung zu einander stehen.

Nachdem nun der Ursprung der Schwierigkeit des in Rede stehenden Falles genau angegeben ist, bieten sich verschiedene Mittel dar, diese Schwierigkeit zu heben. Eins der einfachsten, welches sich sehr leicht anwenden läßt, ist folgendes. Statt der beiden Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ betrachtet man die beiden Functionen $f(x) + f'(x)$ und $f'(x)$. Ein Werth α von x, welcher $f'(x)$ zu Null macht, liegt zwischen a und b, und man soll das Zeichen von $f(\alpha)$ mit Sicherheit bestimmen. Es sei $\varphi(x) = f(x) + f'(x)$, so ist klar, daß das Zeichen von $f(\alpha)$ genau dasselbe ist, als das von $\varphi(\alpha)$, weil $f'(\alpha)$ nach der Voraussetzung Null ist. Man braucht also nur eben so zu verfahren, als wenn $\varphi(x)$ und $f'(x)$ die gegebenen Functionen wären, und in diesem Falle liegt der Punkt, für welchen die Tangente zur Abscissenaxe parallel ist, nicht mehr nothwendig zwischen den Grenzen a und b, zwischen welchen die Wurzel α der

Gleichung $f'(x) = 0$ liegt. Man muß also untersuchen, ob die beiden Grenzen a und b so beschaffen sind, daß den beiden Reihen:

$$\varphi^{(n)}(a) \ldots\ldots \varphi'''(a),\ \varphi''(a),\ \varphi'(a),\ \varphi(a)$$

$$\varphi^{(n)}(b) \ldots\ldots \varphi'''(b),\ \varphi''(b),\ \varphi'(b),\ \varphi(b)$$

eine Reihe von Indices entspricht, deren letztes Glied Null ist, und wenn diese Bedingung anfangs nicht statt findet; so kann man durch Zusammenziehung dieser Grenzen leicht zwei andere, näher liegende Grenzen a′ und b′ bestimmen, für welche das letzte Glied der Reihe der Indices Null ist und zwischen welchen zugleich die Wurzel α der Gleichung $f'(x) = 0$ liegt. Wenn diese Bedingungen statt finden, so ist das gemeinschaftliche Zeichen von $\varphi(a')$ und $\varphi(b')$ das Zeichen von $\varphi(\alpha)$, und folglich das von $f(a)$. Wenn das gefundene Zeichen positiv ist, so sind die beiden Wurzeln reell, und wenn es negativ ist, so sind sie imaginär.

Hierbei ist besonders zu bemerken, daß die Substitution der Grenzen a und b in die Function $\varphi(x)$ und in ihre abgeleiteten Functionen sehr leicht ist, weil $\varphi(x) = f(x) + f'(x)$ ist, und weil durch die vorhergehenden Operationen, durch welche die ersten genäherten Grenzen gefunden wurden, die Resultate der Substitution in $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x) \ldots\ldots$ bereits bekannt sind. Es läßt sich also der Fall der imaginären Wurzeln nach der bloßen Betrachtung der schon gebildeten Zahlenresultate unterscheiden, und man erhält so eine genaue und sehr einfache Auflösung der vorgelegten Aufgabe.

§ 39. In dem oben angeführten Beispiele sind die den Grenzen 2 und 3 entsprechenden Reihen:

	$f^{v}(x)$	$f^{iv}(x)$	$f'''(x)$	$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$
(2)	+	+	−	−	+	−
	120	168	48	82	80	21
	0	0	1	0	1	2
(3)	+	+	+	−	−	−.
	120	288	180	26	43	32

Vermittelst der Reihe (2) bildet man eine ihr entsprechende Reihe (2)′, wenn man zu jedem Gliede das zur Linken vorangehende Glied derselben Reihe addirt und die Zeichen der Resultate bemerkt. Ebenso verfährt man mit der Reihe (3), um die ihr entsprechende Reihe (3)′ zu bilden. Auf diese Weise findet man:

	$\varphi^{v}(x)$	$\varphi^{iv}(x)'''$	$\varphi(x)$	$\varphi''(x)$	$\varphi'(x)$	$\varphi(x)$
(2)′.....	+	+	+	−	−	+
	0	0	0	1	0	1
(3)′.....	+	+	+	+	−	−.

Da das letzte Glied dieser neuen Reihe der Indices nicht Null ist, so folgt, daß die Grenzen 2 und 3 einander noch nicht nahe genug liegen, um die Aufgabe unmittelbar auflösen zu können. Man

substituirt also eine zwischenliegende Zahl 2, 2 in die Reihe der Functionen, und erhält folgendes Schema:

	$f^{V}(x)$,	$f^{IV}(x)$,	$f'''(x)$,	$f''(x)$,	$f'(x)$,	$f(x)$
(2)	+	+	—	—	+	—
	120	168	48	82	30	21
(2, 2)	+	+	—	—	+	—
	120	192	12	88,08	12,872	16,69248
	0	0	1	0	1	2
(3)	+	+	+	—	—	—
	120	288	180	26	43	32

Weil das letzte Glied der den Reihen (2, 2) und (3) entsprechenden Reihe der Indices 2 ist, so müssen zwischen 2, 2 und 3 zwei Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ gesucht werden, aber man weiß noch nicht, ob diese beiden Wurzeln reell, oder ob sie imaginär sind. Was die Gleichung $f'(x)=0$ betrifft, so hat sie nothwendig eine reelle Wurzel zwischen 2, 2 und 3, und da die drei letzten Glieder der Reihe der Indices 0 1 2 sind, so ergibt sich, ob die beiden Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ reell, oder imaginär sind, wenn man in $f(x)$ die Wurzel α der Gleichung $f'(x)=0$ substituirt. Denn wenn das Zeichen von $f(\alpha)$ positiv ist, so sind die beiden Wurzeln gewiß reell und sie sind imaginär, wenn das Zeichen von $f(\alpha)$ negativ ist. Betrachtet man nun die Reihen:

	$\varphi^{V}(x)$,	$\varphi^{IV}(x)$,	$\varphi'''(x)$,	$\varphi''(x)$,	$\varphi'(x)$,	$\varphi(x)$
(2, 2)' ...	+	+	+	—	—	—
	0	0	0	1	0	0
(3)' ...	+	+	+	+	—	—

welche nicht der Function $f(x)$ und ihren abgeleiteten Functionen, sondern der Function $\varphi(x)=f(x)+f'(x)$ und deren abgeleiteten Functionen entsprechen; so erhellet aus der, diesen Reihen entsprechenden Reihe der Indices, daß es zwischen 2, 2 und 3 keine Zahl geben kann, welche den Ausdruck $f(x)+f'(x)$ zu Null macht, weil der letzte Index $=0$ ist. Folglich geben alle, zwischen 2, 2 und 3 liegende Zahlen, wenn sie in den Ausdruck $f(x)+f'(x)$ substituirt werden, Resultate von demselben Zeichen. Da nun die Wurzel α der Gleichung $f'(x)=0$ zwischen 2, 2 und 3 liegt, so hat das Resultat $f(\alpha)+f'(\alpha)$ das Zeichen —, und da $f'(\alpha)$ nach der Voraussetzung Null ist, so folgt, daß $f(\alpha)$ eine negative Zahl ist. Also sind die beiden gesuchten Wurzeln imaginär.

§ 40. Durch das eben aus einander gesetzte Verfahren wird die Aufgabe, welche die Unterscheidung der imaginären Wurzeln zum Gegenstande hat, in allen Fällen leicht gelöst, und man hat folgende Regel:

Nachdem man die den beiden Grenzen a und b, zwischen welchen die beiden Wurzeln der Gleichung gesucht werden müssen, entsprechenden Zeichenreihen gebildet hat, muß man auch die Reihe der Indices bilden, welche die Vergleichung dieser Reihen gibt. Die drei

letzten Glieder der Reihe der Indices sind nach der Voraussetzung 0 1 2, so daß die Gleichung $f'(x)=0$ zwischen a und b eine reelle Wurzel hat, und man weiß nicht, ob die beiden Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ reell oder imaginär sind. Um dieses zu bestimmen, muß man die Reihe (a) durch eine Reihe (A) ersetzen, welche aus ihr abgeleitet wird, wenn man zu jedem Gliede derselben das zur Linken vorhergehende Glied addirt, und ebenso muß man für die Reihe (b) eine Reihe (B) setzen, welche auf dieselbe Weise aus (b) abgeleitet wird, wie (A) aus (a). Wenn man die den Reihen (A) und (B) entsprechende Reihe der Indices bildet, und findet, daß das letzte Glied derselben Null ist; so ist die Aufgabe gelöst. Wenn aber dieser letzte Index nicht Null ist, so muß man die Grenzen a und b zusammenziehen, und fährt man fort, dieselbe Regel anzuwenden, so werden entweder die beiden Wurzeln getrennt, wodurch ihre Realität dargethan ist, oder das letzte Glied der den Reihen (A) und (B) entsprechenden Reihe der Indices ist 0. In diesem Falle ist das letzte Zeichen der Reihe (A) dasselbe, als das der Reihe (B), und wenn dieses gemeinschaftliche Zeichen auch das Zeichen von $f''(a)$ und $f''(b)$ in den beiden ursprünglichen Reihen (a) und (b) ist; so sind die beiden gesuchten Wurzeln imaginär. Aber wenn das gemeinschaftliche Zeichen der beiden letzten Glieder der Reihen (A) und (B) dem Zeichen von $f''(a)$ und $f''(b)$ entgegengesetzt ist, so sind die beiden gesuchten Wurzeln reell. Man könnte diese Auflösung der vorliegenden Aufgabe unter sehr verschiedenen Formen darstellen; denn es ist einleuchtend, daß man zu denselben Folgerungen gelangte, wenn man zu der ursprünglichen Function $f(x)$ andere Functionen, als $f'(x)$ addirte, welche auch die Eigenschaft hätten, daß sie für den Werth α von x Null würden. Aber durch die Anwendung der Function $f'(x)$ wird die Rechnung auf eine sehr einfache Form reducirt, weil man zu jedem Gliede einer Reihe nur das vorhergehende Glied derselben Reihe zu addiren braucht.

§ 41. Hätte man bloß die Absicht, von dem Probleme der Distinction der imaginären Wurzeln eine genaue und einfache Auflösung zu geben, so könnte man sich auf die in § 22 ff. des ersten Abschnittes gegebene Auflösung beschränken; aber wegen der Wichtigkeit dieser Untersuchung und ihrer Beziehungen zur Theorie der Gleichungen mit mehreren Unbekannten ist es nöthig, mehrere Auflösungen dieser Aufgabe zu geben, und in dieser Absicht wollen wir noch das Verfahren der Approximation des zweiten Grades darauf anwenden. Wir betrachten den Fall, wo die Zeichen der beiden Reihen folgende sind:

	$f^{(m)}(x)$	....	$f'''(x)$	$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$
(a)....	+	......	+	+	−	+
			0	0	1	2
(b)....	+	......	+	+	+	+

und alsdann wird es leicht sein, die aus der Untersuchung dieses Falles erhaltenen Folgerungen auf alle übrigen Fälle anzuwenden.

Da die drei letzten Glieder der Reihe der Indices 0 1 2 sind, so leuchtet ein, daß zwischen den Grenzen a und b zwei Wurzeln

der Gleichung $f(x)=0$ gesucht werden müssen, und daß zu bestimmen ist, ob diese Wurzeln reell, oder ob sie imaginär sind. Der Curvenbogen, dessen Gleichung $f(x)=0$ ist, wird in dem Intervalle der Grenzen a und b durch Figur 14 dargestellt. Man setze $a+x-a$ statt x in $f(x)$, wo a den ersten genäherten Werth der Wurzel, welcher durch die Abscisse oa ausgedrückt wird, bezeichnet, und entwickle $f(a+x-a)$, wie folgt:

$$f(x)=f(a+x-a)=f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)^2\tfrac{1}{2}f''(a\ldots x).$$

Das Ergänzungsglied der Reihe enthält die Größe $f''(a\ldots x)$, d. h. eine Function einer gewissen, zwischen a und x liegenden Größe, welche gebildet wird, wenn man zu a eine, zwischen 0 und $x-a$ liegende, unbekannte Größe addirt (siehe Seite 76). Da die den Functionen $f''(x)$ und $f'''(x)$ entsprechenden Zeichen in den beiden Reihen (a) und (b) positiv sind, so folgt, daß die Werthe von $f''(x)$ innerhalb des ganzen Intervalles der Grenzen a und b positiv sind und beständig wachsen, wenn man von der ersten Grenze a zur zweiten b übergeht. Folglich ist $f''(a)$ der kleinste und $f''(b)$ der größte Werth, welchen der Ausdruck $f''(a\ldots x)$ zwischen den Grenzen a und b annehmen kann. Also ist:

$$f(x)>f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)^2\tfrac{1}{2}f''(a);$$

welche Bedingung in dem ganzen Intervalle der Grenzen a und b statt findet. Wenn man also, nachdem $f(a)$, $f'(a)$ und $f''(a)$ bestimmt sind, die Curve construirt, deren Abscisse x und deren Ordinate:

$$f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)^2\tfrac{1}{2}f''(a)$$

ist; so liegt der dieser Curve angehörige Bogen $m\pi\nu$ (Figur 14) unter dem Bogen mpn, dessen Ordinate $f(x)$ ist, und zwar in dem ganzen Intervalle ab. Im Punkte m sind die beiden Ordinaten einander gleich und ihr gemeinschaftlicher Werth ist $f(a)$. Die abgeleitete Function der ersten Ordnung ist für die erste Curve $f'(x)$ und für die andere $f'(a)+(x-a)f''(a)$. Diese Functionen werden also für $x=a$ einander gleich, so daß die Bogen mpn und $m\pi\nu$ im Punkte m eine Berührung der ersten Ordnung haben. Von diesem Punkte aus trennen sich die Curven und die zweite $m\pi\nu$ liegt unterhalb der erstern mpn. Wenn also der parabolische Bogen $m\pi\nu$ die Abscissenaxe ab nicht schneidet, so ist dieses mit dem Bogen mpn um so weniger der Fall, und alsdann sind die beiden gesuchten Wurzeln imaginär. Sucht man also die Wurzeln der Gleichung des zweiten Grades:

$$f(a)+\delta f'(a)+\frac{\delta^2}{2}f''(a)=0$$

und findet sich, daß diese Wurzeln imaginär sind, d. h. daß die Bedingung:

$$\left(\frac{f(a)}{f''(a)}\right)^2<2\frac{f(a)}{f''(a)},$$

oder:

$$(f'(a))^2 < 2f(a).f''(a)$$

statt findet; so sind die beiden Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ zuverlässig imaginär.

Setzt man ferner in der Gleichung:

$$f(x)=f(a+x-a)=f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)^2\tfrac{1}{2}f''(a\ldots x)$$

für das Glied $f''(a\ldots x)$ seinen größten Werth $f''(b)$, so hat man:

$$f(x) < f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)^2\tfrac{1}{2}f''(b).$$

Beschreibt man also den Curvenbogen $m\pi'\nu'$, dessen Ordinate:

$$f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)^2\tfrac{1}{2}f''(b)$$

ist, so liegt derselbe innerhalb des ganzen Intervalles ab über dem Bogen mpn. Der Werth der abgeleiteten Function der ersten Ordnung ist für die Curve mpn, $f'(x)$ und für die Curve $m\pi\nu$, $f'(a)+(x-a)f''(b)$, und dieser Werth ist folglich für beide Curven im Punkte m gleich $f'(a)$; es findet also im Punkte m zwischen der parabolischen Curve $m\pi'\nu'$ und der parabolischen Curve mpn eine Berührung der ersten Ordnung statt, und von diesem Punkte aus liegt der Bogen $m\pi'\nu'$ in dem ganzen Intervalle ab über dem Curvenbogen mpn. Schneidet also der parabolische Bogen $m\pi'\nu'$ die Abscissenaxe ab, so ist dieses bei der Curve mpn um so mehr der Fall, d. h. die beiden gesuchten Wurzeln sind reell. Sucht man also die Wurzeln der Gleichung des zweiten Grades:

$$f(a)+\delta f'(a)+\frac{\delta^2}{2}f''(b)=0,$$

und findet man, daß dieselben reell sind, d. h. daß die Bedingung:

$$\left(\frac{f'(a)}{f''(b)}\right)^2 > 2\frac{f(a)}{f''(b)}, \text{ oder } (f'(a))^2 > 2f(a).f''(b)$$

statt findet; so muß man schließen, daß die gegebene Gleichung $f(x)=0$ zwischen den Grenzen a und b zwei reelle Wurzeln hat.

Aehnliche Resultate erhält man, wenn man den andern Endpunkt n des Bogens mpn betrachtet. Denn setzt man $b-(b-x)$ für x in die Function $f(x)$, so hat man:

$$f(x)=f(b)-(b-x)f'(b)+(b-x)^2\tfrac{1}{2}f''(x\ldots b),$$

wo der Ausdruck $(x\ldots b)$ eine, zwischen x und b liegende, unbekannte Größe bezeichnet. Nun ist aber der größte Werth, welchen man erhält, wenn in $f''(x)$ eine, zwischen a und b liegende Größe substituirt wird, nach der Voraussetzung $=f''(b)$ und der kleinste Werth $=f''(a)$. Man hat also die zwei Bedingungen:

$$f(x) < f(b)-(b-x)f'(b)+(b-x)^2.\tfrac{1}{2}f''(b),$$

$$f(x) > f(b)-(b-x)f'(b)+(b-x)^2.\tfrac{1}{2}f''(a).$$

Betrachtet man nun x als veränderliche Abscisse und construirt die Curven, deren Ordinaten:

$$f(b)-(b-x)f'(b)+(b-x)^2 \cdot \tfrac{1}{2}f''(b)$$

$$f(b)-(b-x)f'(b)+(b-x)^2 \cdot \tfrac{1}{2}f''(a)$$

sind; so erhält man zwei parabolische Curven, wovon die erste in dem Intervalle der Grenzen a und b stets über, und die zweite beständig unter der Curve m p n liegt. Wenn also die obere Curve die Abscissenaxe schneidet, so schneidet auch die Curve m p n diese Axe und die beiden gesuchten Wurzeln sind reell. Wenn aber die untere Curve diese Axe nicht schneidet, so ist dieses auch bei der Curve m p n gewiß nicht der Fall, und die beiden gesuchten Wurzeln sind imaginär. Sind also die Wurzeln der Gleichung des zweites Grades:

$$f(b)-\delta f'(b)+\frac{\delta^2}{2}f''(b)=0$$

reell, d. h. findet die Bedingung statt:

$$\left(\frac{f'(b)}{f''(b)}\right)^2 > 2\frac{f(b)}{f''(b)}, \text{ oder } (f'(b))^2 > 2f(b) \cdot f''(b),$$

so sind die beiden Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ reell. Aus der Gleichung:

$$f(b)-\delta f'(b)+\frac{\delta^2}{2}f''(a)=0$$

folgt ferner, daß die beiden Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ imaginär sind, wenn die Bedingung statt findet:

$$(f'(b))^2 < 2f(b)\, f''(a).$$

§ 42. Wenn man die vorhergehenden Resultate zusammenstellt, so darf man schließen: 1) daß die beiden gesuchten Wurzeln zuverlässig reell sind, wenn eine der beiden Bedingungen statt findet:

$$(f(a))^2 > 2f(a) \cdot f''(b) \qquad (1)$$

$$(f'(b))^2 > 2f(b) \cdot f'(b), \qquad (2)$$

und 2) daß diese Wurzeln imaginär sind, wenn eine der beiden Bedingungen:

$$(f'(a))^2 < 2f(a) \cdot f''(a) \qquad (3)$$

$$(f'(b))^2 < 2f(b) \cdot f''(a) \qquad (4)$$

erfüllt wird.

Es kann geschehen, daß keine der Bedingungen (1), (2), (3), (4) statt findet, d. h., daß die vier entgegengesetzten Bedingungen zugleich erfüllt werden. In diesem Falle sind die Grenzen a und b noch nicht genug zusammengezogen, um durch eine Operation bestimmen zu können, ob die beiden Wurzeln reell, oder imaginär sind. Man muß also die Grenzen zusammenziehen, indem man in $f(x)$

eine, zwischen a und b liegende Zahl substituirt. Wenn durch diese Substitution die gesuchten Wurzeln gesondert werden, so sind sie reell und die Aufgabe ist gelöst; aber wenn die beiden Wurzeln nicht getrennt werden, so muß man zu einer zweiten, der vorhergehenden ähnlichen Operation übergehen, um zu entscheiden, ob die Wurzeln reell, oder imaginär sind. Man untersucht folglich, ob, indem man statt der Grenzen a und b die neuen Grenzen a' und b' anwendet, eine der vier Bedingungen (1), (2), (3), (4) erfüllt wird, und alsdann ist die Natur der Wurzeln bekannt. Nun ist es aber offenbar unmöglich, daß man durch Zusammenziehung der Grenzen nicht bald dahin gelangte, daß einer oder mehreren der fraglichen Bedingungen Genüge geschieht. Durch dieses Verfahren, welches sich auf die Vergleichung bekannter Zahlenwerthe reducirt, läßt sich also die Natur der Wurzeln mit Zuverlässigkeit bestimmen.

§ 43. Wir haben vorausgesetzt, daß die den beiden Grenzen a und b entsprechenden Zeichenreihen:

	$f^{(m)}(x)$	$f'''(x)$,	$f''(x)$,	$f'(x)$,	$f(x)$
(a) ...	+	+	+	−	+
(b) ...	+	+	+	+	+

sind, wo also der Werth von $f''(x)$ mit x von $x=a$ bis $x=b$ wächst, weil in diesem Intervalle das Zeichen von $f'''(x)$ positiv ist. Wir wollen nun den entgegengesetzten Fall betrachten, für welchen die beiden Zeichenreihen:

(a)	+	−	+	−	+
(b)	+	−	+	+	+

sind. Die drei letzten Glieder der Reihe der Indices sind wieder 0 1 2, und es ist zu bestimmen, ob die Gleichung $f(x)=0$ zwischen a und b in der That zwei reelle Wurzeln hat. Es ist wieder:

$$f(x)=f(a+x-a)=f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)^2\,\tfrac{1}{2}f''(a\ldots x),$$

und da das Zeichen von $f'''(x)$ in dem ganzen Intervalle der Grenzen a und b negativ ist; so nimmt der Werth von $f''(x)$ ab, wenn x von $x=a$ bis $x=b$ zunimmt. Setzt man also $f''(a)$ für $f''(a\ldots x)$, so wird der Werth von $f(x)$ vergrößert, und wenn $f''(b)$ für $f''(a\ldots x)$ gesetzt wird, so wird dieser Werth verkleinert. Es ist folglich:

$$f(x)>f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)^2\,.\,\tfrac{1}{2}f''(b)$$

$$f(x)<f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)^2\,.\,\tfrac{1}{2}f''(a),$$

und wenn man die Curve construirt, deren Abscisse x und deren Ordinate $f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)^2\,.\,\frac{1}{2}f''(b)$ ist; so liegt der Bogen dieser Curve in dem ganzen Intervalle ab unter der Curve mpn. Die beiden gesuchten Wurzeln sind also imaginär, wenn dieser untere Bogen die Abscissenaxe nicht schneidet, d. h. wenn die

Bedingung statt findet:

$$(f'(a))^2 < 2f(a) . f''(b).$$

Die Curve dagegen, deren Abscisse x und deren Ordinate $f(a) + (x-a) f'(a) + (x-a)^2 . \frac{1}{2} f''(a)$ ist, liegt in dem ganzen Intervalle ab über der Curve mpn. Die Curve mpn schneidet also die Abscissenaxe zuverlässig, wenn der obere Curvenbogen diese Axe schneidet. Die beiden gesuchten Wurzeln sind also reell, wenn die Bedingung erfüllt wird:

$$(f'(a))^2 > 2f(a) . f''(b).$$

Betrachtet man nun die zweite Grenze b, so findet man folgende Resultate:

$$f(x) > f(b) - (b-x) f'(b) + (b-x)^2 . \tfrac{1}{2} f''(b)$$

$$f(x) < f(b) - (b-x) f'(b) + (b-x)^2 . \tfrac{1}{2} f''(a);$$

folglich liegt die parabolische Curve mpn, deren Ordinate $f(x)$ ist, über der Curve, deren Ordinate $f(b)-(b-x)f'(b)+(b-x)^2 . \frac{1}{2}f''(b)$ ist, und unter der Curve, deren Ordinate $f(b)-(b-x)f'(b)+(b-x)^2 . \frac{1}{2}f''(a)$ ist. Hieraus folgt, daß die beiden gesuchten Wurzeln reell sind, wenn die Bedingung:

$$(f'(b))^2 > 2f(b) . f''(a).$$

statt findet, und daß sie imaginär sind, wenn die Bedingung:

$$(f'(b))^2 < 2f(b) . f''(b)$$

erfüllt wird.

Vergleicht man diese Resultate, welche dem Falle entsprechen, wo das Zeichen von $f'''(x)$ negativ ist mit denen, welche man findet, wenn das Zeichen von $f'''(x)$ positiv ist; so ergibt sich 1) daß die gesuchten Wurzeln reell sind, wenn das Quadrat der Function $f'(x)$ für eine der Grenzen größer ist, als das doppelte Product aus der Function $f(x)$ für dieselbe Grenze und der Function $f''(x)$ für die der beiden Grenzen, welche für $f''(x)$ den größten Werth gibt; 2) daß die gesuchten Wurzeln imaginär sind, wenn das Quadrat der Function $f'(x)$ für eine der beiden Grenzen kleiner ist, als das doppelte Product aus der Function $f(x)$ für dieselbe Grenze und der Function $f''(x)$ für diejenige der beiden Grenzen, für welche $f''(x)$ den kleinsten Werth bekommt.

§ 44. Wir haben nun bloß noch den Fall zu betrachten, wo der Bogen mpn (Fig. 15) unter der Abscissenaxe liegt und derselben seine Convexität zukehrt. Die beiden Zeichenreihen sind:

	$f^{(m)}(x)$	.....	$f'''(x)$,	$f''(x)$,	$f'(x)$,	$f(x)$
(a)	+	.....	+	−	+	−
(b)	+	.....	+	−	−	−

oder:

	$f^{(m)}(x)$	.....	$f'''(x)$,	$f''(x)$,	$f'(x)$,	$f(x)$
(a)	+	.....	−	−	+	−
(b)	+	.....	−	−	−	−.

Im ersten Falle hat man für die Grenze a:

$$f(x) > f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2 \cdot \tfrac{1}{2}f''(a)$$

$$f(x) < f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2 \cdot \tfrac{1}{2}f''(b).$$

Also liegt der Bogen $m\pi'\nu'$ in dem ganzen Intervalle ab über und der Bogen $m\pi\nu$ unter dem Bogen mpn.

Für die Grenze b hat man:

$$f(x) > f(b) - (b-x)f'(b) + (b-x)^2 \cdot \tfrac{1}{2}f''(a)$$

$$f(x) < f(b) - (b-x)f'(b) + (b-x)^2 \cdot \tfrac{1}{2}f''(b);$$

also liegt in dem ganzen Intervalle ab der erste parabolische Bogen über und der zweite unter dem Bogen mpn.

Löst man die Gleichungen des zweiten Grades auf, wodurch die Durchschnittspunkte der beiden parabolischen Curven mit der Abscissenaxe bestimmt werden, wenn es solche gibt, so ergibt sich, daß die beiden Wurzeln reell sind, wenn eine der Bedingungen:

$$(f'(a))^2 > 2f(a) \cdot f''(a)$$

$$(f'(b))^2 > 2f(b) \cdot f''(a)$$

erfüllt wird, und imaginär, wenn eine der Bedingungen:

$$(f'(a))^2 < 2f(a) \cdot f''(b)$$

$$(f'(b))^2 < 2f(b) \cdot f''(b)$$

statt findet.

§ 45. Im zweiten Falle, wo die Zeichenreihen (a) und (b) folgende sind:

(a)	.....	+	.....	−	−	+	−
(b)	.....	+	.....	−	−	−	−

findet man für die Grenze a:

$$f(x) > f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2 \cdot \tfrac{1}{2}f''(b)$$

$$f(x) < f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2 \cdot \tfrac{1}{2}f''(a),$$

und für die Grenze b:

$$f(x) > f(b) - (b-x)f'(b) + (b-x)^2 \cdot \tfrac{1}{2}f''(b)$$

$$f(x) < f(b) - (b-x)f'(b) + (b-x)^2 \cdot \tfrac{1}{2}f''(a).$$

Die Wurzeln sind folglich reell, wenn der Bogen $m\pi\nu$ die Abscissenaxe schneidet, d. h. wenn eine der beiden Bedingungen statt findet:

$$(f'(a))^2 > 2f(a) \cdot f''(b)$$

$$(f'(b))^2 > 2f(b) \cdot f''(b),$$

und die Wurzeln sind imaginär, wenn man eine der beiden Bedin-

gungen hat:

$$(f'(a))^2 < 2f(a) . f''(a)$$

$$(f'(b))^2 < 2f(b) . f''(a).$$

§ 46. Es lassen sich nun alle möglichen Fälle in folgende allgemeine Regel zusammenfassen, wenn man bemerkt, daß ein negativer Werth von $f''(x)$ desto kleiner ist, je mehr negative Einheiten er enthält und um so größer, je weniger solcher Einheiten er hat.

Es sind die den Grenzen entsprechenden Zeichenreihen gebildet und es wird vorausgesetzt, daß die Grenzen hinreichend zusammengezogen sind, damit die vier letzten Indices 0 0 1 2 sind, welcher Bedingung immer leicht zu genügen ist. Man hat sich ferner überzeugt, daß die beiden gesuchten Wurzeln nicht gleich sind, was sich ebenfalls leicht finden läßt. Da die Werthe der Resultate:

$$f''(a),\ f'(a),\ f(a)$$

$$f''(b),\ f'(b),\ f(b)$$

durch die Operation, welche die Grenzen a und b gibt, bekannt sind; so hat man folgende beiden Sätze:

1) Die beiden gesuchten Wurzeln sind reell, wenn das Quadrat eines der beiden mittleren Glieder $f'(a)$ oder $f'(b)$ größer ist als das doppelte Product aus dem, in derselben Reihe zur Rechten dieses mittleren Gliedes liegenden Gliede und dem der beiden äußern Glieder $f''(a)$ und $f''(b)$, welches die meisten positiven oder negativen Einheiten enthält. Man hat hier also zwei verschiedene Bedingungen. Wenn eine derselben erfüllt wird, so sind die gesuchten Wurzeln reell und dieses ist um so mehr der Fall, wenn beide Bedingungen erfüllt sind.

2) Die gesuchten Wurzeln sind imaginär, wenn das Quadrat eines der beiden mittleren Glieder $f'(a)$ oder $f'(b)$ kleiner ist, als das doppelte Product aus dem, in derselben Reihe zur Rechten dieses mittleren Gliedes liegenden Gliede und dem der beiden äußern Glieder $f''(a)$ und $f''(b)$, welches die wenigsten positiven oder negativen Einheiten enthält. Hieraus entspringen auch zwei verschiedene Bedingungen. Wenn eine derselben erfüllt wird, so sind die gesuchten Wurzeln imaginär, und dieses ist um so mehr der Fall, wenn beide Bedingungen statt finden.

Wenn keine der vier angeführten Bedingungen statt findet, d. h. wenn die vier entgegengesetzten Bedingungen statt finden; so sind die Grenzen a und b noch nicht genug zusammengezogen, um die Natur der Wurzeln durch eine Operation bestimmen zu können. Man zertheilt also das Intervall a.b der ersten Grenzen, und wenn die Wurzeln durch Substitution einer zwischenliegenden Zahl nicht getrennt werden; so wendet man die eben ausgesprochene Regel von Neuem an, und durch Fortsetzung dieses Verfahrens wird man nothwendig bald dahin gelangen, die Wurzeln zu trennen, wenn sie reell sind, oder man findet, daß sie imaginär sind.

§ 47. Obgleich sich durch die bisher gegebenen Regeln die imaginären Wurzeln von den reellen unterscheiden lassen, so erfordern

sie doch oft wiederholte Versuche. Es war daher ein Lehrsatz, nach welchem sich in allen Fällen direct beurtheilen läßt, wie viele reelle Wurzeln eine gegebene Gleichung zwischen gegebenen Grenzen a und b hat, sehr wünschenswerth. Diesen Lehrsatz hat Sturm entdeckt, und denselben 1829 dem französischen Nationalinstitute vorgelegt. Er besteht in Folgendem:

Es sei

$$X = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

eine Gleichung, welche keine gleichen reellen Wurzeln mehr hat, und worin A_0, A_1, A_2,... reelle Zahlen bedeuten. Man bilde zuerst die abgeleitete Function X_1 von X, dividire X durch X_1 und wenn man einen Rest von einem niedrigern Grade als X_1 gefunden hat; so verwandele man die Zeichen aller Glieder desselben in die entgegengesetzten, welcher alsdann mit X_2 bezeichnet werden mag. Ebenso dividire man X_1 durch X_2, und wenn man einen Rest von einem niedrigern Grade als X_2 gefunden hat; so verwandele man wieder die Zeichen aller Glieder dieses Restes in die entgegengesetzten, welcher nun mit X_3 bezeichnet werden soll. Diese Divisionen setze man nun auf dieselbe Weise fort, als ob zwischen der Function X und ihrer abgeleiteten Function X_1 der größte gemeinschaftliche Divisor gesucht würde, indem man jedoch die Zeichen jedes Restes in die entgegengesetzten verwandelt; so wird man nothwendig auf einen Zahlenrest kommen, welcher kein x mehr enthält, aber auch nicht Null sein kann, weil sonst die Gleichung $X = 0$ gleiche Wurzeln hätte, was gegen die Voraussetzung ist. Dieser letzte Rest, mit entgegengesetzten Zeichen genommen, heiße X_r.

Durch diese Operation erhält man also die Reihe von Functionen:

$$X,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ \ldots\ X_{r-1},\ X_r \qquad (x)$$

welche sämmtlich die Veränderliche x enthalten, mit Ausnahme der letzten X_r.

In diese Reihe von Functionen substituire man für x die gegebenen Grenzen a und b, so hat die Gleichung $X = 0$ zwischen diesen Grenzen so viele reelle Wurzeln, als die Reihe (a) Zeichenwechsel mehr hat, als die Reihe (b).

Denn es seien Y_1, Y_2, Y_3, ... Y_{r-1} die Quotienten, welche erhalten werden, wenn man X durch X_1, X_1 durch X_2, X_2 durch X_3, rc. dividirt, so hat man, weil $-X_2$, $-X_3$, $-X_4$,.... die Reste dieser Divisionen sind, folgende Gleichungen:

$$X = X_1 Y_1 - X_2,$$
$$X_1 = X_2 Y_2 - X_3,$$
$$X_2 = X_3 Y_3 - X_4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_{n-1} = X_n X_n - X_{n+1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_{r-2} = X_{r-1} X_{r-1} - X_r,$$

aus welchen folgt: 1) daß zwei auf einander folgende Functionen der Reihe (x) nicht für denselben Werth von x verschwinden können, weil, wenn z. B. $X_{n-1}=0$ und $X_n=0$ wäre, aus der Gleichung:

$$X_{n-1}=X_n Y_n - X_{n+1}$$

auch $X_{n+1}=0$, und indem man weiter schließt, auch $X_r=0$ folgen würde, welches gegen die Voraussetzung ist; und 2) daß, wenn eine mittlere Function der Reihe (x) für einen gewissen Werth von x verschwindet, die vorhergehende und nachfolgende Function für diesen Werth von x Zahlenwerthe von entgegengesetztem Zeichen bekommen, weil aus der obigen Gleichung:

$$X_{n-1}=X_n Y_n - X_{n+1}$$

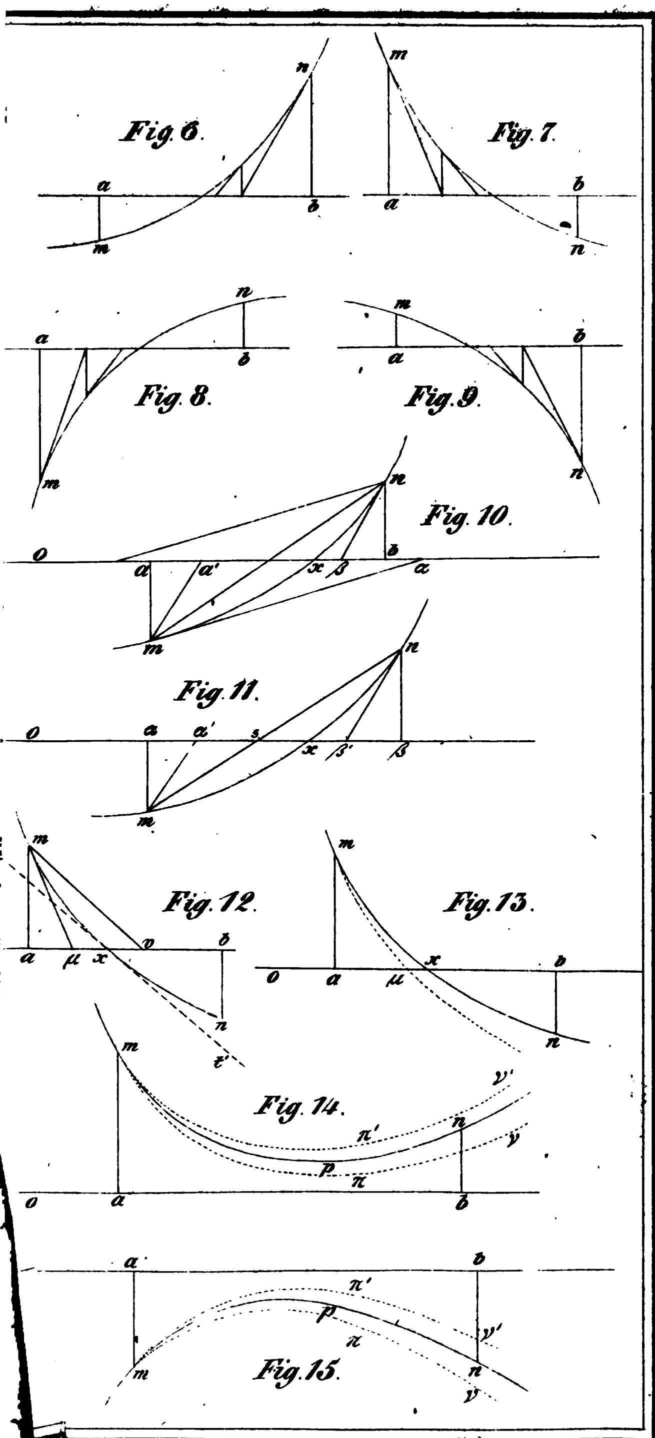
für $X_n=0$ sich $X_{n-1}=-X_{n+1}$ ergibt.

Denken wir uns nun wieder, wie früher, x wachse allmählich von der ersten Grenze a bis zu der zweiten b. So lange x keinen Werth erreicht, für welchen eine, oder mehrere Functionen der Reihe (x) verschwinden, so lange bleiben offenbar die Zeichen der Reihe (x) dieselben. Aber auch dann wird die Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe (x) nicht verändert, wenn x einen Werth c erreicht, für welchen eine, oder mehrere m i t t l e r e Functionen dieser Reihe verschwinden, die erste aber nicht. Denn gesetzt, es verschwinde für $x=c$ die mittlere Function X_n, so können die Functionen X_{n-1}, X_{n+1} nach dem Vorhergehenden nicht Null sein, und müssen entgegengesetzte Zeichen haben, so daß die Reihe der drei Functionen:

$$X_{n-1}, \; X_n, \; X_{n+1}$$

immer einen Zeichenwechsel darbietet, was für ein Zeichen man übrigens X_n auch geben mag. Da die Functionen X_{n-1}, X_{n+1} von $x=a$ bis $x=c$ ihr Zeichen nicht geändert haben, so haben sie auch in diesem Intervalle entgegengesetzte Zeichen gehabt, und folglich hat die Reihe der obigen drei Functionen auch einen Zeichenwechsel gehabt, ehe $x=c$ wurde, welches Zeichen X_n auch gehabt haben mag. Ferner kann man c um eine unendlich kleine Größe dc wachsen lassen, daß die Gleichungen $X_{n-1}=0$, $X_{n+1}=0$ in dem Intervalle von $x=c$ bis $x=c+dc$ keine Wurzel haben, also X_{n-1} und X_{n+1} ihr Zeichen nicht ändern, und folglich entgegengesetzte Zeichen haben. Folglich hat die Reihe der drei Functionen noch einen Zeichenwechsel, welches Zeichen X_n auch haben mag, und da dasselbe von jeder andern für $x=c$ verschwindenden mittleren Function gilt; so ist klar, daß die Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe (x) nicht geändert wird, wenn x einen Werth c durchläuft, für welchen eine oder mehrere mittlere Functionen dieser Reihe verschwinden.

Dagegen verliert die Reihe (x) jedesmal einen Zeichenwechsel, wenn x eine reelle Wurzel der Gleichung $X=0$ erreicht und darüber hinausgeht, welches ganz auf dieselbe Weise, wie im ersten Abschnitte § 2 bewiesen wird. Die gegebene Gleichung $X=0$ hat demnach zwischen den Grenzen a und b so viele reelle Wurzeln, als die Reihe (a) Zeichenwechsel mehr hat, wie die Reihe (b).



Stdr. v. Wehrt in Braunschw.